MA-11A Álgebra **31 de Mayo, 2001**

Pauta Control 2

PROBLEMA 1:

(i.1).- Veremos dos formas de hacer esta parte. En ambas adoptaremos la convención que $\binom{a}{b} = 0$ si $b > a$ o $b < 0$.

- **Primera Forma**: Haciendo inducción en n.

  Si $n = 0$, entonces

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k} (-1)^k = \binom{r}{0} (-1)^0 = 1 = (-1)^0 \binom{r-1}{0} = (-1)^n \binom{r-z}{n} g \,.$$

  Asumimos que la igualdad se tiene para n y todo $r > n$. Por definición de sumatoria e hipótesis inductiva,

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{r}{k} (-1)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k} (-1)^k + \binom{r}{n+1} (-1)^{n+1} = (-1)^n \binom{r-1}{n} + \binom{r}{n+1} (-1)^{n+1} \,.$$

  Luego, como $(-1)^{n+1} = -(-1)^n$, sacando factor común y aplicando la identidad de Pascal, sigue que

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{r}{k} (-1)^k &= (-1)^{n+1} \left(\binom{r}{n+1} - \binom{r-1}{n} \right) \\ &= (-1)^{n+1} \left(\binom{r-1}{n} + \binom{r-1}{n+1} - \binom{r-1}{n} \right) \\ &= (-1)^{n+1} \binom{r-1}{n+1} \,. \end{aligned}$$

  Lo anterior concluye la inducción.

- **Segunda Forma**: Haciendo inducción en r. Si $r = 1$, entonces $n = 0$ y

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k} (-1)^k = \binom{1}{0} (-1)^0 = 1 = (-1)^0 \binom{0}{0} = (-1)^n \binom{r-1}{n} \,.$$

  Asumimos que la igualdad se tiene para r y todo $0 \leq n < r$. Luego, por la identidad de Pascal, dado que por nuestra convención $\binom{r}{-1} = 0$, y por propiedades de sumatoria,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{r+1}{k} (-1)^k = \sum_{k=0}^{n} \left(\binom{r}{k} + \binom{r}{k-1} \right) (-1)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k} (-1)^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{r}{k-1} (-1)^k \,.$$

Haciendo un cambio de variable en la última sumatoria, sigue que

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{r+1}{k}(-1)^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{r}{k}(-1)^k+\sum_{j=0}^{n-1}\binom{r}{j}(-1)^{j+1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{r}{k}(-1)^k-\sum_{k=0}^{n-1}\binom{r}{k}(-1)^k.$$

Aplicando la hipótesis inductiva a cada una de las últimas sumatorias, agrupando, y usando la identidad de Pascal, obtenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{r+1}{k}(-1)^k &= (-1)^n\binom{r-1}{n}-(-1)^{n-1}\binom{r-1}{n-1}\\ &= (-1)^n\left(\binom{r-1}{n}+\binom{r-1}{n-1}\right)\\ &= (-1)^n\binom{r}{n}.\end{aligned}$$

Lo anterior completa la demostración inductiva.

(i.2).- Nuevamente adoptaremos la convención que $\binom{a}{b}=0$ si $b>a$ o $b<0$.

Luego, por Pascal y puesto que $(-1)^k=-(-1)^{k-1}$,

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{r}{k}(-1)^k=\sum_{k=0}^{n}\left\{\binom{r-1}{k}+\binom{r-1}{k-1}\right\}(-1)^k==\sum_{k=0}^{n}\left\{\binom{r-1}{k}(-1)^k-\binom{r-1}{k-1}(-1)^{k-1}\right\}.$$

Por propiedad telescópica de la sumatoria y por la convención adoptada, se concluye que

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{r}{k}(-1)^k=(-1)^n\binom{r-1}{n}-(-1)^0\binom{r-1}{-1}=(-1)^n\binom{r-1}{n}.$$

(ii).- Por inducción en n.

Si $n=3$,

$$\frac{3}{2}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}=\frac{3}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{23}{18}=\frac{46}{36}<\frac{49}{36}=\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}.$$

Asumimos que la desigualdad es cierta para n. Por propiedades de sumatorias e hipótesis inductiva, sigue que

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k^2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(n+1)^2}>\frac{3}{2}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}$$

Nos queda verificar que

$$\frac{3}{2}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}\geq\frac{3}{2}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2},$$

o equivalentemente

$$\frac{1}{n+1}\geq\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{n-1}{n^2},$$

o sea que $n^2 \geq (n-1)(n+1) = n^2 - 1$. Pero esto último es evidente. Por lo tanto se tiene la inducción.

<u>Nota</u>: También podríamos haber observado inicialmente que como $\sum_{k=1}^{n}(1/k^2) = \sum_{k=1}^{n-1}(1/k^2) + (1/n^2)$ por lo que para establecer el resultado pedido basta probar que $\dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{n} < \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2}$.

PROBLEMA 2:

(i).- Primero veamos que B es infinito. Para ello, observar que

$$A = f_1(A) = \{f_1(a) \,:\, a \in A\} \subseteq B\,.$$

Luego, como A es infinito y esta contenido en B se tiene que B es infinito.

Demostraremos que B es numerable de dos maneras.

- **Primera Forma**: Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $B_n = \{f_n(a) \,:\, a \in A\} = f_n(A)$. Luego, $|B_n| \leq |A|$, por lo que B_n es necesariamente numerable (ya que A lo es). Además,

$$B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n = \{b \in \mathbb{R} \,:\, \exists n \in \mathbb{N}, b \in B_n\}\,,$$

  i.e., B es una unión numerable de conjuntos numerables. Por resultado conocido, sigue que B es numerable.

- **Segunda Forma**: Para cada $a \in A$, definimos $B_a = \{f_n(a) \,:\, n \in \mathbb{N}\}$. Luego, $|B_a| \leq |\mathbb{N}|$, por lo que B_a es necesariamente numerable (dado que $\mathbb{N}$ lo es). Además,

$$B = \bigcup_{a \in A} B_a = \{b \in \mathbb{R} \,:\, \exists a \in A, b \in B_a\}\,,$$

  i.e., B es una unión numerable de conjuntos numerables. Por resultado conocido, sigue que B es numerable.

- **Tercera Forma**: Como el conjunto A es infinito numerable, podemos enumerarlo y asumir sin pérdida de generalidad que es igual a $A = \{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$. Luego podemos construir una tabla de doble entrada como se muestra a continuación: Recorriendo la tabla en zig–zag

$n \backslash m$	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	$\ldots$
0	$f_0(a_0)$	$f_0(a_1)$	$f_0(a_2)$	$f_0(a_3)$	$f_0(a_4)$	$f_0(a_5)$	$f_0(a_6)$	
1	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	$\ldots$	
2	$f_2(a_0)$	$f_2(a_1)$	$f_2(a_2)$	$f_2(a_3)$	$f_2(a_4)$	$\ldots$		
3	$f_3(a_0)$	$f_3(a_1)$	$f_3(a_2)$	$f_3(a_3)$	$\ldots$			
4	$f_4(a_0)$	$f_4(a_1)$	$f_4(a_2)$	$\ldots$				
5	$f_5(a_0)$	$f_5(a_1)$	$\ldots$					
6	$\ldots$							
$\vdots$								

(diagonalmente), eliminando los términos repetidos concluimos que podemos enumerar todos los elementos que aparecen en la tabla. Como estos elementos son justamente los elementos que pertenecen a B concluimos que B es numerable.

Nota: De lo anterior se puede derivar la inyección entre $\mathbb{N}$ y B, pero dado que el argumento es suficientemente claro y standard no vale la pena explicitar dicha función.

(ii).- Veremos dos formas de hacerla.

- **Primera Forma**: El resultado es obvio si $m = 0$ pues en este caso sólo hay $N = 1$ personas. Haremos la demostración por inducción en m tomando como caso base $m = 1$.

  Planteamos como hipótesis inductiva: "Al comienzo de una vuelta en torno al círculo comienza retirándose la persona que sigue a aquella inicialmente numerada con el 1".

  En efecto, si $m = 1$, inicialmente hay dos personas y la primera en retirarse es la número 2, i.e., la que sigue a la numerada 1.

  Supongamos que la hipótesis inductiva se cumple para m y consideremos el caso $m + 1$, i.e., cuando $N = 2^{m+1}$. En la primera vuelta en torno al círculo la primera en retirarse es la número 2, i.e., la que sigue a la numerada 1. Luego, se retiran las número $4, 6, 8, \ldots, N - 2, N$, i.e., en la primera vuelta se retiran la mitad de las personas (todas aquellas con números pares). Quedan en el círculo $N/2 = 2^{m+1}/2 = 2^m$ personas. Como la última persona en retirarse en la primera vuelta fue la número N y la 1 no se retiró, en la siguiente vuelta comienza retirándose la que sigue a la número 1. Por hipótesis inductiva, esto se mantiene en las restantes vueltas. Esto completa la inducción.

  Hemos establecido que en cada vuelta en torno al círculo comienza retirándose la persona que sigue a aquella inicialmente numerada con el 1. Por lo tanto, la persona que inicialmente estaba numerada con el 1 nunca se retira es la que queda.

- **Segunda Forma**: Sea $J(N)$ el número que inicialmente se le asignó a la persona que queda cuando inicialmente hay N personas en el círculo numeradas como se indica en el enunciado del problema. Consideremos la hipótesis inductiva, $J(2^m) = 1$.

  Es trivial verificar que $J(1) = 1$, luego el caso $m = 0$ se cumple.

  Supongamos que la hipótesis inductiva se cumple para m y consideremos el caso $m + 1$. En la primera vuelta en torno al círculo la primera persona en retirarse es la número 2. Luego, se retiran las número $4, 6, 8, \ldots, N - 2, N$, i.e., en la primera vuelta se retiran la mitad de las personas (todas aquellas con números pares). Quedan en el círculo $N/2 = 2^{m+1}/2 = 2^m$ personas, de hecho, todas a las que inicialmente se les asignó un número impar. Renumerando a la persona l que queda después de la primera vuelta con el número $(l + 1)/2$, nos queda un círculo de personas numeradas del 1 a 2^m. Observar que la persona numerada 1 queda con su mismo número. Además, en la siguiente vuelta se parte eliminando a la persona que ahora tiene el número 2 (porque en la primera vuelta la última persona en ser eliminada era la que precedía a la inicialmente numerada 1 y la persona numerada 1 no se retiró). Por hipótesis inductiva la que queda si se continua el proceso es la $J(2^m) = 1$, luego $J(2^{m+1}) = 1$. Esto completa la inducción y establece que $J(2^m) = 1$ cualquiera sea m, i.e., prueba el resultado pedido.

PROBLEMA 3:

(i).- Debemos establecer que $\mathcal{R}$ es refleja, simétrica, y transitiva.

- **Reflexividad**: Hay que mostrar que para todo $A \subseteq E$, se tiene que $A\mathcal{R}A$, i.e., que existe $f : E \to E$ biyección tal que $f(A) = A$. En efecto, $f = id_E$ cumple con la propiedad deseada. Por lo tanto, $\mathcal{R}$ es refleja.
- **Simetría**: Hay que mostrar que para todo $A, B \subseteq E$, si $A\mathcal{R}B$, entonces $B\mathcal{R}A$, i.e., que la existencia de $f : E \to E$ biyección tal que $f(A) = B$, implica que existe $g : E \to E$ biyección tal que $g(B) = A$. En efecto, como f es biyectiva, entonces posee inversa $g = f^{-1}$, que además es biyectiva. Por otro lado, como $f(A) = B$, sigue que $g(B) = f^{-1}(B) = f^{-1}(f(A)) = f^{-1} \circ f(A) = A$. Luego, g cumple con las propiedades deseadas.
- **Transitividad**: Hay que mostrar que para todo $A, B, C \subseteq E$, si $A\mathcal{R}B$ y $B\mathcal{R}C$, entonces $A\mathcal{R}C$, i.e., que la existencia de $f, g : E \to E$ biyecciónes tal que $f(A) = B$ y $g(B) = C$, implica que existe $h : E \to E$ biyección tal que $h(A) = C$. En efecto, como f y g son biyectivas, entonces $h = g \circ f$ es biyectiva y además, $g \circ f(A) = g(f(A)) = g(B) = C$. Luego, h cumple con las propiedades deseadas.

(ii).- Veamos primero que $[A]_{\mathcal{R}} \subseteq \{B \in \mathcal{P}(E) : |B| = |A|, |E \setminus B| = |E \setminus A|\}$. En efecto,

$$B \in [A]_{\mathcal{R}} \iff \exists f : E \to E \text{ biyección}, f(A) = B$$

Como f es biyección, además se tiene que $f(E \setminus A) = f(A^c) = (f(A))^c = B^c = E \setminus B$.

Luego, $f|_A : A \to B$ tal que $f|_A(x) = f(x)$ y $f|_{E\setminus A} : E \setminus A \to E \setminus B$ tal que $f|_{E\setminus A}(x) = f(x)$ son funciones sobreyectivas. Recordando que al restringir una función inyectiva se preserva la inyectividad, tenemos que $f|_A$ y $f|_{E\setminus A}$ son biyecciónes de A en B y de $E\setminus A$ en $E\setminus B$ respectivamente. Sigue, por definición de igualdad de cardinalidad, que $|A| = |B|$ y $|E \setminus A| = |E \setminus B|$.

Probemos ahora que $\{B \in \mathcal{P}(E) : |B| = |A|, |E \setminus B| = |E \setminus A|\} \subseteq [A]_{\mathcal{R}}$. En efecto, sea $B \subseteq E$ tal que $|B| = |A|$, $|E \setminus B| = |E \setminus A|$. Por definición de igualdad de cardinalidad, tenemos que existen funciones $f : A \to B$ y $g : E \setminus A \to E \setminus B$ biyectivas. Luego, $h : E \to E$ tal que

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A\,, \\ g(x) & \text{si } x \in E \setminus A\,, \end{cases}$$

es biyectiva y tal que $h(A) = f(A) = B$, i.e., $A\mathcal{R}B$ o lo que es lo mismo $B \in [A]_{\mathcal{R}}$ (para ver que h es biyectiva, basta notar que h es sobreyectiva porque $h(E) = h(A \cup E \setminus A) = h(A) \cup h(E \setminus A) = f(A) \cup g(E \setminus A) = B \cup E \setminus B = E$, y es inyectiva porque $h(x) = h(x')$ implica que $h(x) = h(x') \in B$ o $h(x), h(x') \in E \setminus B$, por lo que $x, x' \in A$ o $x, x' \in E \setminus A$, luego $h(x) = h(x')$ equivale a decir que $f(x) = f(x')$ o $g(x) = g(x')$ — en cualquier caso, la inyectividad de f o de g permiten concluir que $x = x'$).

(iii).- Como en este caso $E \setminus (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) = \mathbb{Z} \setminus (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) = \{0\}$, i.e., tiene cardinalidad 1, y $E \setminus P = \mathbb{Z} \setminus P$ es el conjunto de los números impares, i.e., es un conjunto infinito, entonces $|E \setminus (\mathbb{Z} \setminus \{0\})| \neq |E \setminus P|$. Por lo tanto por (ii) se concluye que no es cierto que $(\mathbb{Z} \setminus \{0\})\mathcal{R}P$.