Fecha: 16 de mayo del 2002
Tiempo: 3 horas

Pauta Control 2 MA-11A Álgebra

1. (a)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{7}[(\sqrt{3})^{7-k}(\sqrt{2})^{k}] &= (\sqrt{3})^{7}\sum_{k=0}^{7}(\tfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}})^{k} = (\sqrt{3})^{7}\frac{(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}})^{8}-1}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}-1} = \frac{(\sqrt{2})^{8}-(\sqrt{3})^{8}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} \\
&= -(16-81)(\sqrt{2}+\sqrt{3}) \\
&= 65(\sqrt{2}+\sqrt{3})
\end{aligned}$$

`[0/2 ptos]`

(b)

- n=10 $10^3 = 1000 < 1024 = 2^{10}$.
- Sea $n \geq 10$
  - H.I $n^3 < 2^n$.
  - p.d.q $(n+1)^3 < 2^{n+1}$.

Forma 1

$$\begin{aligned}
(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 &< n^3 + 3n^2 + 3n^2 + 3n^2 \\
&< n^3 + 9n^2 < n^3 + n^3 < 2^{n+1}.
\end{aligned}$$

Forma 2

$(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$. Considerando la hipótesis de inducción, basta con probar que $3n^2 + 3n + 1 < n^3$. Lo que es equivalente a probar que $n(n^2 - 3n - 3) > 1$. A su vez, para que ésto sea cierto basta con demostrar que $(n^2 - 3n - 3) \geq 1$. Pero:

$$(n^2 - 3n - 3) \geq 1 \iff (n+1)(n-4) \geq 0.$$

Pero como $n \geq 10$, obviamente se tiene $(n+1)(n-4) \geq 0$.

`[0/2 ptos]`

(c)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k}\binom{n}{k+1} &= -\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k+1}\binom{n}{k+1} = -\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k}\binom{n}{k} \\
&= -[\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\binom{n}{k} - (-1)^{0}\binom{n}{0}] \\
&= -[(-1+1)^{n} - 1] = 1.
\end{aligned}$$

`[0/2 ptos]`

2. (a) • Reflexividad

Sea $f \in \mathcal{F}$. Obviamente $f \sim f$. Basta con escoger $k = 0$. En efecto: $(\forall i \in \mathbb{N})\ f(i) - f(i) = 0$.

[0/0.5 ptos]

• Simetría

Sean $f, g \in \mathcal{F}$ tal que $f \sim g$. Es decir, para un cierto $k_0 \in \mathbb{Z}$ se tiene $(\forall i \in \mathbb{N})\ f(i) - g(i) = k_0$. Obviamente $g \sim f$. Basta con escoger $k = -k_0$. En efecto: $(\forall i \in \mathbb{N})\ g(i) - f(i) = -k_0$.

[0/0.5 ptos]

• Transitividad

Sean $f, g, h \in \mathcal{F}$ tal que $f \sim g$ y $g \sim h$. Es decir, para un par $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ se tiene $(\forall i \in \mathbb{N})\ f(i) - g(i) = k_1$ y $(\forall i \in \mathbb{N})\ g(i) - h(i) = k_2$. Obviamente $f \sim h$. Basta con escoger $k_3 = k_1 + k_2$. En efecto:

$$(\forall i \in \mathbb{N})\ f(i) - h(i) = (f(i) - g(i)) + (g(i) - h(i)) = k_3.$$

[0/0.5 ptos]

(b) Sea $f \in \mathcal{F}$. Debemos encontrar $g \in \mathcal{F}_0$ tal que $f \sim g$. Consideremos

$$\begin{array}{rccl} g: & \mathbb{N} & \to & \mathbb{Z} \\ & i & \mapsto & g(i) = f(i) - f(0) \end{array}$$

[0/0.5 ptos]

• $g \in \mathcal{F}_0$. En efecto: $g(0) = f(0) - f(0) = 0$.

[0/0.5 ptos]

• $f \sim g$. Basta con considerar $k = f(0)$. En efecto: para $i \in \mathbb{N}$ arbitrario se tiene que $f(i) - g(i) = f(0)$.

[0/0.5 ptos]

(c) Consideremos

$$\begin{array}{rccl} h: & \mathbb{N} & \to & \mathbb{Z} \\ & i & \mapsto & g(i) = -i \end{array}$$

[0/0.5 ptos]

Sea $f \in \mathcal{F}_0$ arbitrario. Probaremos por inducción que:

$$(\forall i \in \mathbb{N})\ h(i) \leq f(i).$$

- $\underline{i=0}$ $h(0) = 0 \leq 0 = f(0)$
- Sea $i \in \mathbb{N}$.
  - $\underline{\text{H.I.}}$ $h(i) \leq f(i)$.
  - $\underline{\text{p.d.q.}}$ $h(i+1) \leq f(i+1)$.
    En efecto: $h(i+1) = h(i) - 1 \leq f(i) - 1 \leq f(i+1)$.
    (estamos usando que $-1 \leq f(i) - f(i+1) \leq 1$).

`[0/1 pto]`

(d) Sean $f, g \in \mathcal{F}_0$ arbitrarios. Demostraremos por inducción que

$$(\forall i \in \mathbb{N})(\exists k \in \mathbb{Z})\ f(i) - g(i) = 2k.$$

- $\underline{i=0}$ Basta con k=0. En efecto: $f(0) - g(0) = 0 = 2 \times 0$.
- Sea $i \in \mathbb{N}$.
  - $\underline{\text{H.I.}}$ Para un cierto $k \in \mathbb{Z}:\ f(i) - g(i) = 2k$.
  - $\underline{\text{p.d.q.}}$ Para un cierto $k' \in \mathbb{Z}:\ f(i+1) - g(i+1) = 2k'$.
    En efecto: basta con notar que $f(i+1) \in \{f(i)-1, f(i)+1\}$ y que $g(i+1) \in \{g(i)-1, g(i)+1\}$. Estudiemos las combinaciones posibles.
    * Si $f(i+1) = f(i)-1$ y $g(i+1) = g(i)-1$ o si $f(i+1) = f(i)+1$ y $g(i+1) = g(i)+1$, se tiene que $f(i+1) - g(i+1) = f(i) - g(i) = 2k$. Es decir: $k' = k$.
    * Si $f(i+1) = f(i) - 1$ y $g(i+1) = g(i) + 1$ se tiene que $f(i+1) - g(i+1) = f(i) - g(i) - 2 = 2(k-1)$. Es decir: $k' = k - 1$.
    * Si $f(i+1) = f(i) + 1$ y $g(i+1) = g(i) - 1$ se tiene que $f(i+1) - g(i+1) = f(i) - g(i) + 2 = 2(k+1)$. Es decir: $k' = k + 1$.

`[0/1.5 ptos]`

3. (a) Sean $x, y \in S$ y $j \in \mathbb{N}$ tal que $h^j(x) = y$. Sabemos que existe un único par $q, r \in \mathbb{N}$ tal que $j = qk + r$ donde $0 \leq r < k$. Sigue que:

$$\begin{aligned} y = h^j(x) = h^{(qk+r)}(x) = h^{qk}(h^r(x)) = (h^k)^q(h^r(x)) &= id^q(h^r(x)) \\ &= h^r(x) \end{aligned}$$

`[0/1.5 ptos]`

(b) i. **Forma 1** Sea $x \in S$. Obviamente $x \sim x$ pues $h^k(x) = x$.

Forma 2 Sea $x \in S$. Obviamente $x \sim x$ pues $h^0(x) = id(x) = x$.

`[0/1 pto]`

ii. **Forma 1** Sea $x, y \in S$ tal que $x \sim y$. Es decir, para un cierto $j \in \mathbb{N}$, se tiene que $h^j(x) = y$. Por la parte (a), sabemos que debe existir un $r \in \mathbb{N}$, con $0 \leq r < k$, tal que $h^r(x) = y$. Aplicando h^{k-r} a ambos términos se tiene: $h^{k-r}(h^r(x)) = h^{k-r}(y)$. Es decir:

$$h^{k-r}(y) = (h^{k-r} \circ h^r)(x) = h^{(k-r)+r}(x) = h^k(x) = x.$$

Es decir, $y \sim x$.

Forma 2 Se puede demostrar primero que h es invertible. Más aún: $h^{-1} = h^{k-1}$. En efecto:

$$h \circ h^{k-1} = h^{k-1} \circ h = h^k = id.$$

Sean $x, y \in S$ tal que $x \sim y$. Es decir, para un cierto $j \in \mathbb{N}$, se tiene que $h^j(x) = y$. Sigue que $h^{-j}(y) = x$. Lo que es lo mismo, $(h^{-1})^j(y) = x$. Luego, $h^{(k-1)j}(y) = x$. es decir: $y \sim x$.

`[0/2 ptos]`

iii. Sea $x, y, z \in S$ tal que $x \sim y \;\wedge\; y \sim z$. Es decir, para un cierto par $j_1, j_2 \in \mathbb{N}$, se tiene $h^{j_1}(x) = y \;\wedge\; h^{j_2}(y) = z$. Sigue que:

$$h^{j_2+j_1}(x) = (h^{j_2} \circ h^{j_1})(x) = h^{j_2}(h^{j_1}(x)) = h^{j_2}(y) = z.$$

Es decir, $x \sim z$.

`[0/1.5 ptos]`