PAUTA CONTROL 2 - MA11A-ALGEBRA

(1999)

Pregunta 1.

(i)

(i) Propiedad refleja: Sea $(a_1, a_2) \in A$. Probemos que $(a_1, a_2) I\!R (a_1, a_2)$.
En efecto

$$a_1 + a_2 - a_1 - a_2 = 0 = 2 \cdot 0,$$

luego si $k = 0$ se tiene que $a_1 + a_2 - a_1 - a_2 = 2 \cdot k$, lo que prueba la reflexividad.

(ii) Simetría: Sean $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in A$. Supongamos que $(a_1, a_2) I\!R (b_1, b_2)$ y probemos que $(b_1, b_2) I\!R (a_1, a_2)$.

Se tiene que para un cierto $k \in \mathbb{Z}$,

$$a_1 + a_2 - b_1 - b_2 = 2 \cdot k \Leftrightarrow b_1 + b_2 - a_1 - a_2 = 2 \cdot (-k)$$

Como $-k \in \mathbb{Z}$, la última expresión prueba que $(b_1, b_2) I\!R (a_1, a_2)$.

(iii) Transitividad: Sean $(a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2) \in A$ tales que $(a_1, a_2) I\!R (b_1, b_2)$ y $(b_1, b_2) I\!R (c_1, c_2)$. Sean $k, \bar{k} \in \mathbb{Z}$ tales que

$$a_1 + a_2 - b_1 - b_2 = 2k \wedge b_1 + b_2 - c_1 - c_2 = 2\bar{k}$$

Si sumamos las igualdades anteriores obtenemos,

$$a_1 + a_2 - c_1 - c_2 = 2(k + \bar{k}).$$

Como $(k + \bar{k}) \in \mathbb{Z}$, hemos deducido que$(a_1, a_2) I\!R (c_1, c_2)$ y $I\!R$ es transitiva.

(ii)
$$\begin{aligned}[(0,0)]_{I\!R} &= \{(a_1,a_2)\in A|(a_1a_2)I\!R(0,0)\}\\ &= \{(a_1,a_2)\in A|a_1+a_2=2k \text{ para un cierto } k\in \mathbb{Z}\}\end{aligned}$$

Para que la suma de dos enteros sea par es necesario que ambos sean impares o ambos pares, luego,

$$[(0,0)]_{I\!R} = \{(2k_1,2k_2)\in A|k_1,k_2\in \mathbb{Z}\}\cup\{(2k_1+1,2k_2+1)\in A|k_1,k_2\in \mathbb{Z}\}$$

$$\begin{aligned}[(1,0)]_{I\!R} &= \{(a_1,a_2)\in A|a_1+a_2-1=2k \text{ para un cierto } k\in \mathbb{Z}\}\\ &= \{(a_1,a_2)\in A|a_1+a_2=2k+1 \text{ para un cierto } k\in \mathbb{Z}\}\end{aligned}$$

Para que la suma de dos enteros sea impar es necesario y suficiente que uno de ellos sea par y el otro impar, luego,

$$[(1,0)]_{I\!R} = \{2k_1,2k_2+1)\in A \quad k_1,k_2\in \mathbb{Z}\}\cup\{2k_1+1,2k_2)\in A|\ k_1,k_2\in \mathbb{Z}\}$$

(iii) Sea $(a_1,a_2)\in A$. Se tienen dos casos posibles:

(1) Ambos tiene la misma paridad, y en este caso $(a_1,a_2)\in[(0,0)]_{I\!R}$ *o*

(2) Tienen distinta paridad, y $(a_1,a_2)\in[(1,0)]_{I\!R}$. Esto prueba que,

$$A\subseteq[(0,0)]_{I\!R}\cup[(1,0)]_{I\!R}$$

Pero como $[(0,0)]_{I\!R}\cup[(1,0)]_{I\!R}\subseteq A$ (por definición), concluimos la igualdad.

(iv) Sea $f:[(0,0)]_{I\!R}\to[(1,0)]_{I\!R}$ definida por $f(a_1,a_2)=(a_1+1,a_2)$.

Está bien definida pues como a_1 *y* a_2 tienen la misma paridad , entonces a_1+1 *y* a_2 tiene paridad contraria.

Probemos que es biyectiva. Para eso basta observar que $g:[(1,0)]_{I\!R}\to[(0,0)]_{I\!R}$ tal que $g(b_1,b_2)=(b_1-1,b_2)$ es la inversa de f.

Pregunta 2.

(i) Propiedad Refleja: Sea $(a,b) \in E \times E$. Probemos que $(a,b)I\!R^*(a,b)$. Es decir,

$$\begin{array}{rcc}
(a,b)I\!R^*(a,b) & \Leftrightarrow & (a \neq a \wedge aI\!Ra) \vee (a = a \wedge bI\!Rb) \\
& \Leftrightarrow & (F \wedge V) \vee (V \wedge bI\!Rb) \\
& \Leftrightarrow & F \vee (V \wedge bI\!Rb) \\
& \Leftrightarrow & bI\!Rb \\
& \Leftrightarrow & V
\end{array}$$

Lo que prueba que $I\!R^*$ es refleja. (usamos 2 veces que $I\!R$ es refleja: $aI\!Ra \Leftrightarrow \vee\ y\ bI\!Rb \Leftrightarrow V$)

Anti Simetría: Sean $(a,b) \in E \times E, (c,d) \in E \times E$ tales que $(c,b)I\!R^*(c,d) \wedge (ad)I\!R^*(a,b)$.

Luego,

$$\begin{array}{rcc}
(a,b)I\!R^*(c,d) \wedge (c,d)I\!R^*(a,b) & \Leftrightarrow & ((a \neq c \wedge aI\!Rc) \vee (a = c \wedge bI\!Rd))\wedge \\
& & ((c \neq a \wedge cI\!Ra) \vee (c = a \wedge dI\!Rb)) \\
& \Leftrightarrow & ((a \neq c \wedge aI\!Rc) \wedge (c \neq a \wedge cI\!Ra))\vee \\
& & ((a \neq c \wedge aI\!Rc) \wedge (c = a \wedge dI\!Rb))\vee \\
& & ((a = c \wedge bI\!Rc) \wedge (c \neq a \wedge cI\!Ra))\vee \\
& & ((a = c \wedge bI\!Rd) \wedge (c = a \wedge dI\!Rb) \\
& \Leftrightarrow & (a \neq c \wedge aI\!Rc \wedge cI\!Ra)\wedge \\
& & (a = c \wedge bI\!Rd \wedge dI\!Rb)
\end{array}$$

Como $I\!R$ es anti simétrica: $\begin{array}{l} aI\!Rc \wedge cI\!Ra \Rightarrow a = c \\ bI\!Rd \wedge dI\!Rb \Rightarrow b = d \end{array}$

Luego,

$$\begin{array}{rcc}
(a,b)I\!R^*(c,d) \wedge (c,d)I\!R^*(a,b) & \Rightarrow & \neq c \wedge (a = c) \vee (a = c \wedge b = d) \\
& \Leftrightarrow & F \vee (a = c \wedge b = d) \\
& \Leftrightarrow & (a = c \wedge b = d) \\
& \Leftrightarrow & (a,b) = (c,d)
\end{array}$$

Transitividad: Sean $(a,b),(c,d),(e,f) \in EE$ tales que$(a,b)I\!R^*(c,d) \wedge (c,d)I\!R^*(e,f)$. Demostremos que $(a,b)I\!R^*(e,f)$. Vamos a separar en casos:

(I)

<u>a=e:</u> en este caso $(a,b)\mathbb{R}^*(e,f) \Leftrightarrow b\mathbb{R}f$.

-si $a = c$ entonces $a = c = e$ y de la hipótesis $b\mathbb{R}d\wedge$ $d\mathbb{R}f$, como $\mathbb{R}$ es transitiva $b\mathbb{R}f$.

-si $a \neq c$ entonces $c \neq e$ y la hipótesis $a\mathbb{R}c \wedge c\mathbb{R}e$. Como $a = e$, tenemos $a\mathbb{R}c$ $\wedge c\mathbb{R}a$, usando la antisimetría de $\mathbb{R}$ se deduce c=a, lo que es una contradicción. Concluimos que en el caso a=e sólo puede ser a=c y $(a,b)\mathbb{R}^*(e,f)$.

(II)

<u>a $\neq$ e:</u> en este caso $(a,b)\mathbb{R}^*(e,f) \Leftrightarrow a\mathbb{R}e$.

-si a=c entonces la hipótesis $c\mathbb{R}e$ (pues $c \neq e$ al ser a =c) que es lo mismo, en este caso, que $a\mathbb{R}e$.

-si $a \neq c$ entonces por la hipótesis $a\mathbb{R}c$. Hay 2 situaciones:

- c = e, en cuyo caso $a\mathbb{R}e$

-$c \neq e$, en cuyo caso $c\mathbb{R}e$. Como $a\mathbb{R}c$, usando transitividad de $\mathbb{R}$ se concluye que $a\mathbb{R}e$.

(ii) Como $B_1 \subseteq B$, y $B_2 \subseteq B$ y B es numerable (infinito), de la propiedad vista en clases se tendrá que B_1 es finito o infinito numerable y B_2 es finito o infinito numerable.

Si ambos son finitos, como $B = B_1 \cup B_2$, pues $\leq$ es orden total, (en efecto si $b \in B$ entonces $b\mathbb{R}a \vee a\mathbb{R}b$) entonces B es finito, lo que es una contradicción. Luego uno de los 2 es infinito.

Pregunta 3.

(i)

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-1} x^{n-1-i}y^i &= x^{n-1}\sum_{i=0}^{n-1} x^{-i}y^i\\ &= x^{n-1}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{y}{x}\right)^i\\ &= x^{n-1}\,\frac{1-(\frac{y}{x})^n}{1-\frac{y}{x}}\\ &= x^{n-1}\,\frac{x^n-y^n}{x-y}\cdot\frac{x}{x^n}\\ &= \frac{x^n-y^n}{x-y}\end{aligned}$$

(ii)

<u>n=1</u>:

$$\sum_{k=2}^{2}\frac{1}{k} = \frac{1}{2}\,;\ \sum_{k=1}^{2}\frac{(-1)^{k+1}}{k} = \frac{(-1)^2}{1} + \frac{(-1)^3}{2} = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Luego $\displaystyle\sum_{k=2}^{2}\frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$ y la fórmula para $n=1$ es cierta

<u>H.I</u>: la fórmula es cierta hasta n.

n $\rightarrow$ n+1:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=n+2}^{2n+2} \frac{1}{k} &= \frac{1}{n+1} + \sum_{k=n+2}^{2n} \frac{1}{k} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} \\
&= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} \\
&= \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} \\
&= \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} + \frac{(-1)^{2n+1+1}}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \\
&\quad + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+2+1}}{2n+2} \\
&= \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^{k+1}}{k}
\end{aligned}
$$

(iii)

n=1: $2 \cdot 7^1 + 3 \cdot 5^1 - 5 = 14 + 15 - 5 = 24,$ luego es divisible por 24.

H.I: la propiedad es cierta hasta n.

$n \rightarrow n+1$:

$$
\begin{aligned}
2 \cdot 7^{n+1} + 3 \cdot 5^{n+1} - 5 &= 2 \cdot 7^{n+1} + 3 \cdot 5^{n+1} - 5 + 2 \cdot 7^n - 2 \cdot 7^n + 3 \cdot 5^n - 3 \cdot 5^n \\
&= 12 \cdot 7^n + 12 \cdot 5^n + 2 \cdot 7^n + 3 \cdot 5^n - 5 \\
&= 12(7^n + 5^n) + 24 \cdot k (\text{por H.I.})
\end{aligned}
$$

Pero $7^n + 5^n$ es par pues ambos son impares, luego $7^n + 5^n = 2 \cdot k^1,$ de donde, $2 \cdot 7^{n+1} + 3 \cdot 5^{n+1} - 5 = 24 \cdot k^1 + 24 \cdot k = 24(k + k^1)$

Lo que muestra que $2 \cdot 7^{n+1} + 3 \cdot 5^{n+1} - 5$ es divisible por 24.