Pauta Control #2 MA11A Algebra

Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile.

Año 2004

El objetivo de esta pauta es orientar la corrección de los ayudantes y dar al alumno una guía de estudio. Es *responsabilidad del alumno* tener una copia de esta pauta para el día de la revisión de su prueba (Vi 04/05 18:00). Esta se puede obtener vía `http://www.dim.uchile.cl/~lmella/MA11A.html` en formato ps o pdf.

Pauta Control 2

Algebra MA11A

Problema 1

(a) Sean E_1 y E_2 dos conjuntos no vacios y R_1 y R_2 relaciones de orden definidas en E_1 y E_2 respectivamente:

(i) Demuestre que R definida en $E_1 \mathrm{x} E_2$ por:
$(x,y)R(u,v) \Leftrightarrow [xR_1u \wedge yR_2v]$ es relación de orden en $E_1 \mathrm{x} E_2$
Se debe probar que R es refleja, antisimétrica y transitiva.

0.6 ptos Reflexividad

Hay que probar que $\forall (x,y) \in E_1 \mathrm{x} E_2, \quad (x,y)R(x,y)$

En efecto, $(x,y)R(x,y) \Leftrightarrow [xR_1x \wedge yR_2y]$ y esto se cumple al ser R_1 y R_2 relaciones de orden y por lo tanto reflejas.

0.7 ptos Antisimetría

Se debe probar que si $(x,y)R(u,v) \wedge (u,v)R(x,y)$, entonces $(x,y) = (u,v)$

En efecto, $(x,y)R(u,v) \wedge (u,v)R(x,y) \Leftrightarrow (xR_1u \wedge yR_2v) \wedge (uR_1x \wedge vR_2y)$
$\Leftrightarrow (xR_1u \wedge uR_1x) \wedge (yR_2v \wedge vR_2y)$ (Asociat. y Conmutat. de $\wedge$)
$\Rightarrow (x = u) \wedge (y = v)$ (R_1, R_2 Antisimetricas)
$\Leftrightarrow (x,y) = (u,v)$ (Igualdad de pares)

0.7 ptos Transitividad

Se debe probar que si $(x,y)R(u,v) \wedge (u,v)R(r,s)$ entonces $(x,y)R(r,s)$

En efecto

$(x,y)R(u,v) \wedge (u,v)R(r,s) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (xR_1u \wedge yR_2v) \wedge (uR_1r \wedge vR_2s)$
$\Leftrightarrow (xR_1u \wedge uR_1r) \wedge (yR_2v \wedge vR_2s)$ (Asociat, conmut, $\wedge$)
$\Rightarrow (xR_1r \wedge yR_2s)$ (R_1, R_2 transitivas)
$\Leftrightarrow ((x,y)R(r,s))$ (Definición)

(ii) (1.0 pto.) Si $|E_1| \geq 2$ y $|E_2| \geq 2$ y R_1,R_2 son relaciones de orden total, pruebe que R es sólo de orden parcial.

Como R_1 y R_2 son ordenes totales, entonces $(\forall x, u \in E_1) \wedge (\forall y, v \in E_2)$ $(xR_1u \vee uR_1x) \wedge (yR_2v \vee vR_2y)$

Basta considerar, por ejemplo, que si $x, u \in E_1$, y $y, v \in E_2$ son tales que $(xR_1u \wedge vR_2y) \wedge \sim (uR_1x \vee yR_2v)$. Entonces

$$(x,y)R(u,v) \Leftrightarrow (xR_1u \wedge yR_2v) \Leftrightarrow V \wedge F \Leftrightarrow F$$
$$\wedge\ (u,v)R(x,y) \Leftrightarrow (uR_1x \wedge vR_2y) \Leftrightarrow F \wedge V \Leftrightarrow F$$

En consecuencia $\exists (x,y),(u,v) \in E_1 \mathrm{x} E_2$, de modo que $\sim ((x,y)R(u,v) \vee (u,v)R(x,y))$

Por lo tanto R es de orden parcial

OBSERVACION: Si se da un contraejemplo con relaciones R_1 y R_2 particulares, calificar solo : **0.3 ptos**.

(b) Sea $(D_n)_{n \in I\!N}$ una sucesión de números reales definida por: $D_o = 1$, $D_1 = 0$ y $D_n = (n-1)[D_{n-1} + D_{n-2}]$ $\forall n \geq 2$. Demuestre, usando inducción, que:

$$D_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \quad \forall n \in I\!N$$

Usaremos la segunda forma del principio de inducción:

(i) **(0.5 ptos)** Para $n = 0$; $D_o = 0! \sum_{k=0}^{0} \frac{(-1)^k}{k!} = 0! \frac{(-1)^0}{0!} = 1$ (válido por hipotesis)

También si $n = 1$, $D_1 = 1! \sum_{k=0}^{1} \frac{(-1)^k}{k!} = 1!(1-1) = 0$ (válido por hipotesis)

(ii) **(0.5 ptos)** Como $(n-1 < n) \wedge (n-2 < n)$ aceptamos que se cumple

$$D_{n-1} = (n-1)! \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} \quad \wedge\ D_{n-2} = (n-2)! \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(-1)^k}{k!}$$

(iii) (2.0 ptos) Por demostrar que $D_n = n!\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$

En efecto, $D_n = (n-1)[D_{n-1} + D_{n-2}] = (n-1)[(n-1)!\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} + (n-2)!\sum_{k=0}^{n-2} \frac{(-1)^k}{k!}]$

$= (n-1)(n-1)!\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} + (n-1)![\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} - \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}]$
$= (n-1)(n-1)!\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} + (n-1)!\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} - (-1)^{n-1}$
$= (n-1)![n-1+1\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} - (-1)^{n-1}$
$= n!\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} - (1)^{n-1} = n![\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} - \frac{(-1)^n}{n!}] - (-1)^{n-1}$
$= n!\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} - (-1)^n - (1)^{n-1} = n!\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} - (-1)^n + (-1)^n$

Por lo tanto; $\quad D_n = n!\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Problema 2

(a) Pruebe que $\forall n, k \in \mathbb{N},\ k < n,\ \binom{n}{k-1} = \frac{k}{n-k+1} \cdot \binom{n}{k}$ y calcule

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{n-j+1}{j} \binom{n}{j-1}$$

Es inmediato que

(1.0 pto) $\quad \frac{k}{n-k+1}\binom{n}{k} = \frac{kn!}{(n-k+1)(n-k)!k!} = \frac{n!}{(n-k+1)!(k-1)!} = \binom{n}{k-1}$

OBS: Hay varias otras formas de demostrar la identidad.

Para calcular la suma, en la identidad anterior cambiamos j por k y reemplazando queda

$\sum_{j=1}^{n} \frac{n-j+1}{j}\binom{n}{j-1} = \sum_{j=1}^{n} \frac{n-j+1}{j}\frac{j}{n-j+1}\binom{n}{j}$

(1.0 pto) $\quad = \sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j} = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} - \binom{n}{0} = 2^n - 1$

(b) Dadas $f, g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, se define $\quad (f * g) : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \quad$ por:

$$(f * g)(n) = \sum_{k=0}^{n} f(k)g(n-k) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(i) Si $f(u) = 1$ y $g(u) = u, \quad \forall u \in \mathbb{N}$, calcule, en función de n:

$$(f * f)(n) \quad ; (f * g)(n) \quad \text{y} \quad (g * g)(n).$$

Ind: Puede usar el valor de sumas conocidas.

(0.3 ptos) $(f*f)(n) = \sum_{k=0}^{n} f(k)f(n-k) = \sum_{k=0}^{n} 1 \cdot 1 = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$

(0.7 ptos) $(f*g)(n) = \sum_{k=0}^{n} f(k)g(n-k) = \sum_{k=0}^{n} 1 \cdot (n-k)$
$\sum_{k=0}^{n} n - \sum_{k=0 \to 1}^{n} k = n(n+1) - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ (conocido)

(1.0 ptos)
$(g*g)(n) = \sum_{k=0}^{n} g(k)g(n-k) = \sum_{k=0}^{n} k(n-k) =$
$\sum_{k=0\to 1}^{n} nk - \sum_{k=0\to 1}^{n} k^2$
$= \sum_{k=1}^{n} nk - \sum_{k=1}^{n} k^2 = n\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} k^2 =$
$\frac{n^2(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} =$
$\frac{n(n+1)}{6}[3n-(2n+1)] = \frac{n(n+1)(n-1)}{6} = \frac{n(n^2-1)}{2}$ (Sumas conocidas)

(ii) Si $f(u) = \frac{a^u}{u!}$ y $g(u) = \frac{b^u}{u!}$, con $a, b \in I\!R$, $u \in I\!N$.
Calcule, en función de a, b y n, el valor de $n!(f*g)(n)$

(2.0 ptos) $n!(f*g)(n) = \sum_{k=0}^{n} f(k)g(n-k) = n!\sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!}\frac{b^{n-k}}{(n-k)!}$
$= n!\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a+b)^n$

Problema 3

Sea $p \in Z\!\!Z$, $p \geq 2$. Se define en $Q^+ = \{q \in Q / q > 0\}$ la relación Ω_p por:

$$x\Omega_p y \Leftrightarrow \exists \alpha \in Z\!\!Z, \ \frac{x}{y} = p^{\alpha}$$

(i) Demostrar que Ω_p es relación de equivalencia en Q^+

Se debe probar que Ω_p es refleja, simetrica y transitiva.

(0.6 ptos) Reflexividad:

Hay que probar que $\forall x \in Q^+$, $x\Omega_p x$
$x\Omega_p x \Leftrightarrow \exists \alpha \in Z\!\!Z, \ \frac{x}{x} = p^{\alpha} \Leftrightarrow \exists \alpha \in Z\!\!Z, \ p^{\alpha} = 1$
Basta tomar $\alpha = 0 \in Z\!\!Z$. Entonces $x\Omega_p x \forall x \in Q^+$

(0.7 ptos) Simetría:

Hay que demostar que si $\forall x, y \in Q^+$ $x\Omega_p y$ entonces $y\Omega_p x$, es decir:
Si $\exists \alpha \in Z\!\!Z$, $\frac{x}{y} = p^{\alpha}$, entonces $\exists \beta \in Z\!\!Z$, $\frac{y}{x} = p^{\beta}$
En efecto $\frac{x}{y} = p^{\alpha} \Rightarrow \frac{y}{x} = p^{-\alpha}$
Por lo tanto $\exists \beta = -\alpha$, $\beta \in Z\!\!Z$; $\frac{y}{x} = p^{\beta} \Rightarrow y\Omega_p x$

(0.7 ptos) Transitividad:

Hay que demostrar que $\forall x, y, z \in \mathbb{Q}^+$ si $x\Omega_p y \wedge y\Omega_p z$ entonces $x\Omega_p z$

En efecto $x\Omega_p y \wedge y\Omega_p z \Rightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{Z};\ \frac{x}{y} = p^\alpha,\ \frac{y}{z} = p^\beta$. Entonces $\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z} = p^\alpha p^\beta \Rightarrow \frac{x}{z} = p^{\alpha+\beta}$ es decir $\exists \gamma = \alpha + \beta \quad \gamma \in \mathbb{Z};\ \frac{x}{z} = p^\gamma \Rightarrow x\Omega_p z$

(ii) Describa por extensión (el listado de todos los elementos)

$$A = \{q \in [1]_{\Omega_2} / \quad \tfrac{1}{8} \leq q \leq 8\}$$

Primero es preciso caraterizar $[1]_{\Omega_2}$, es decir, la clase de equivalencia de 1 con $p = 2$.
(0.5 ptos) $[1]_{\Omega_2} = \{q \in \mathbb{Q}^+ / q\Omega_2 1\} = \{q \in \mathbb{Q}^+ / q = 1 \cdot 2^\alpha = 2^\alpha, \alpha \in \mathbb{Z}\}$. Es decir, $[1]_{\Omega_2}$ es el conjunto de las potencias de 2.

(0.5 ptos) Entonces $A = \{q \in [1]_{\Omega_2} / \quad \frac{1}{8} \leq q \leq 8\} = \{\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8\}$

(iii) Demuestre que, $\forall y \in \mathbb{Q}^+$, $[y]_{\Omega_p}$ es un conjunto infinito.

$$[y]_{\Omega_p} = \{x \in \mathbb{Q}^+ / x\Omega_p y\} = \{x \in \mathbb{Q}^+ / x = y \cdot p^\alpha, \alpha \in \mathbb{Z}\}$$

(1.0 pto) Es inmediato que $|[y]_{\Omega_p}| = |\mathbb{Z}| = \lambda_o$ y por lo tanto $[y]_{\Omega_p}$ es infinito.

(iv) Recuerde que $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ es número primo si sólo es divisible por la unidad y por si mismo. Asuma que los números primos son infinitos y demuestre que:
$(\forall a, b$ primos$)[\ a \neq b \Rightarrow [a]_{\Omega_p} \neq [b]_{\Omega_p}]$, para concluir que hay infinitas clases distintas.

Supongamos que $[a]_{\Omega_p} = [b]_{\Omega_p}$. Entonces $a \in [b]_{\Omega_p}$, es decir, $a\Omega_p b$. Pero esto significa que $\exists \alpha \in \mathbb{Z}$ tal que $\frac{a}{b} = p^\alpha$ o bién $a = b \cdot p^\alpha$.
En tal caso, a sería múltiplo de b (si $\alpha > 0$) o b múltiplo de a (si $\alpha < 0$) O $a = b$ (si $\alpha = 0$).

En cualquier caso contradice que $a \neq b$, primos. Entonces $[a]_{\Omega_p} \neq [b]_{\Omega_p}$ si $a \neq b$, primos.
Es decir, existen al menos tantas clases distintas como los números primos, esto es, hay infinitas clases distintas (**1.0 ptos**).

(v) Demuestre que $\quad \mathbb{Q}^+/\Omega_p$ es numerable.
Indicación: Considere cualquier función $\varphi : \mathbb{Q}^+/\Omega_p \longrightarrow \mathbb{Q}^+$ tal que para cada clase $C \in \mathbb{Q}^+/\Omega_p$, $\varphi(C)$ es un $x \in \mathbb{Q}^+$ con $C = [x]_{\Omega_p}$

Probaremos que la función $\varphi : \mathbb{Q}^+/\Omega_p \longrightarrow \mathbb{Q}^+$
. $\quad [x]_{\Omega_p} \longrightarrow \varphi([x]_{\Omega_p}) = x$
es una inyección.

(1.0 pto) En efecto $\forall x, y \in \mathbb{Q}^+$, $[x]_{\Omega_p} \neq [y]_{\Omega_p} \Rightarrow x \notin [y]_{\Omega_p}$ (clases disjuntas)
$\Rightarrow x \neq y \Rightarrow \varphi([x]_{\Omega_p}) \neq \varphi([y]_{\Omega_p})$

Entonces, como φ es inyectiva, y $\mathbb{Q}^+$ es numerable, se concluye (propiedad vista en clases) que $\mathbb{Q}^+/\Omega_p$ es numerable.