Pauta Control #2 MA11A Algebra
Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile
Semestre 2005-1

El objetivo de esta pauta es orientar la corrección de los ayudantes y dar al alumno una guía de estudio. Es responsabilidad del alumno tener una copia de esta pauta para el día de la revisión de su prueba. Esta se puede obtener en la página:
http://www.dim.uchile.cl/~lmella/MA12A.html en formato ps o pdf.

Problema 1

a) Sea $(G, *)$ una estructura en la que $*$ es un l.c.i. asociativa, conmutativa e idempotente, es decir, $a^2 = a * a = a \quad \forall a \in G$.
Se define en G la relación R por $xRy \Leftrightarrow x * y = y$.

i) Demuestre que $\forall a, b \in G$ se cumple

i.1) $(a * b)Ra \quad \wedge \quad (a * b)Rb$.

i.2) Si $\exists x \in G$ tal que $xRa \quad \wedge \quad xRb$, entonces, $xR(a * b)$.

i.2) $xRa \quad \wedge \quad xRb \Rightarrow x * a = a \quad \wedge \quad x * b = b$.
Así $(x * a) * (x * b) = a * b \Leftrightarrow x * (a * x) * b = a * b$ (asociat.)
$\Leftrightarrow (x * x) * (a * b) = a * b \Leftrightarrow x * (a * b) = a * b$ (conmut. e idempot.)
$\Leftrightarrow xR(a * b)$ **(1.0 pto.)**

ii) ii.1) Demuestre que R es relación de orden en G.
R **es refleja** ssi $\forall x \in G, xRx \Leftrightarrow \forall x \in G \;\; x * x = x$, lo que se cumple por la idempotencia de x. **(0.5 ptos.)**
R **es antisimétrica**
En efecto $xRy \quad \wedge \quad yRx \Leftrightarrow x * y = y \wedge y * x = x$, pero * es conmutativa, es decir, $x * y = y * x \Rightarrow x = y$. **(0.5 ptos.)**
R **es transitiva**
Sea $xRy \quad \wedge \quad yRz \Leftrightarrow x * y = y \quad \wedge \quad y * z = z$. Reemplazando y queda $(x * y) * z = z \Rightarrow x * (y * z) = z$ asociando $\Rightarrow x * z = z \Rightarrow xRz$ (se reemplazó $y * z = z$) **(0.5 ptos.)**

ii.2) Encuentre un ejemplo particular, escogiendo G y $*$ de modo que $(G, *)$ y R cumplan las condiciones y definición dadas en (a) y R sea de orden Parcial.
Un ejemplo puede ser $E \neq \phi, G = P(E)$ y $* \equiv \cap$ pués: $\cap$ es asociativa, conmutativa e idempotente y así se tiene $x * y = y \Leftrightarrow A \cap B = B \Leftrightarrow B \subseteq A \quad \forall A, P \in P(E)$.
Entonces $ARB \Leftrightarrow B \subseteq A$ es una realación de orden Parcial en $P(E)$ **(1.0 pto.)**
OTRO EJEMPLO puede ser con $(P(E), \cup)$, $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subseteq B$.

b) Sea $\mathcal{C}$ el conjunto de todas las circunferencias en el plano cartesiano cuyos centros tienen coordenadas racionales y su radio es racional, es decir $C \in \mathcal{C} \Leftrightarrow C$ es una circunferencia de centro (a, b) y radio r con $a, b, r \in \mathbb{Q}$.
Pruebe que el conjunto de todos los pares de puntos (P, Q) donde P y Q son extremos de los diámetros horizontales de las circunferencias de $\mathcal{C}$, es infinito numerable.

Hay varias formas.

Primera Forma
Definamos $\mathcal{C} = \{C/C$ es una circunferencia con centro $(a,b) \in Q \times Q$ y radio $r \in Q^+\}$.
El conjunto $\mathcal{C}$ es infinito, bastando, por ejemplo, fijar $r \in Q^+$ y (a,b) recorre $Q \times Q$ que es infinito.
Además

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{C} &\longrightarrow Q \times Q \times Q^+ \\ C &\longrightarrow \varphi(C) = (a,b,r) \text{ es una biyección .} \end{aligned}$$

de modo que $|\mathcal{C}| = |Q \times Q \times Q^+|$ que es numerable y $\psi : \mathcal{C} \to \mathcal{P}_{(P,Q)}$ en que $\mathcal{P}_{(P,Q)} = \{(P,Q)/P,Q$ son ptos. extremos de los diámetros horizontales de las circunferencias de $\mathcal{C}\}$ es también una biyección.
Así $Q \times Q \times Q^+ \quad \overset{\varphi^{-1} \text{ biyectiva}}{\longrightarrow} \mathcal{C} \quad \overset{\psi \text{ biyectiva}}{\longrightarrow} \mathcal{P}_{(P,Q)}$, de modo que $|\mathcal{P}_{(P,Q)}| = |Q \times Q \times Q^+| = \lambda_0$ es decir $\mathcal{P}_{(P,Q)}$ es infinito numerable. **(1.5 ptos)**

Otra Forma (Pueden haber varias formas más)
Podemos definir el conjunto de pares de puntos $\mathcal{P}_{(P,q)}$ como
$\mathcal{P}_{(P,Q)} = \{P(r_1,r_3), Q(r_2,r_3)/r_1 < r_2 \wedge r_1, r_2, r_3 \subset Q\}$ con lo cual P y Q serán siempre extremos de diámetros horizontales de $\odot_s$ centro $\left(\frac{r_1+r_2}{2}, r_3\right)$ y radio $r = \frac{r_2-r_1}{2}$.
Claramente $\mathcal{P}_{(P,Q)}$ es infinito y $P_{(P,Q)} \subseteq Q \times Q$ tal que $\varphi : \mathcal{P}_{(P,Q)} \to Q \times Q$ es inyectiva y por lo tanto $\mathcal{P}_{(P,Q)}$ es infinito numerable (Subconjunto de un conjunto infinito numerable y φ inyectiva)

Problema 2

a) Demuestre que $\sum\limits_{i=1}^{2^k} \frac{1}{2^k+i} \quad \forall k \in I\!N$ (Ind.: no use inducción)

Es inmediato que, mayorando, se tiene

$$\sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{2^k+i} = \frac{1}{2^k+1} + \frac{1}{2^k+2} + \ldots + \frac{1}{2^k+2^k} < \underbrace{\frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} + \ldots + \frac{1}{2^k}}_{2^k \text{ veces}} = \frac{2^k}{2^k} = 1$$

Así $\sum\limits_{i=1}^{2^k} \frac{1}{2^k+i} < 1$ **(1.0 pto.)**

b) Se define $H_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \quad \forall n \geq 1$

b.1) Demuestre, usando inducción que

$$H_{2^k} \leq 1 + k \quad \forall k \in I\!N \text{ (Ind.: Puede usar (a) donde corresponda)}$$

i) Para $k = 0$, por demostrar que $H_{2^0} \leq 1 + 0 \Leftrightarrow H_1 \leq 1$ lo que es verdadero de $H_1 = \sum\limits_{i=1}^{1} \frac{1}{i} = 1$ (de la hipótesis). **(0.3 ptos.)**

ii) Sea $H_{2^k} \leq 1 + k$ algun $k \in I\!N$.

iii) Por demostrar que $H_{2^{k+1}} \leq 1 + k + 1 = 2 + k$.

En efecto, $H_{2^{k+1}} = \sum\limits_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} = \sum\limits_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i} + \sum\limits_{i=2^k+1}^{2^k+2^k=2^{k+1}} \frac{1}{i}$.

Pero, cambiando indices: $\sum\limits_{i=2^k+1}^{2^k+2^k} \frac{1}{i} = \sum\limits_{i=1}^{2^k} \frac{1}{2^k+i} < 1$ por parte (a) y $\sum\limits_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i} = H_{2^k} \leq 1+k$ por hipótesis de inducción.

Así $H_{2^{k+1}} = \sum\limits_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i} + \sum\limits_{i=1}^{2^k} \frac{1}{2^k+i} \leq 1 + k + 1 = 2 + k$ **(0.7 ptos.)**

b.2) Demuestre usando inducción que

$$\sum_{i=1}^{n} H_i = (n+1)H_n - n \quad \forall n \geq 1$$

i) Para $n = 1$, por demostrar que $\sum\limits_{i=1}^{1} H_i = 2H_1 - 1$.

Pero $H_1 = \sum\limits_{i=1}^{1} \frac{1}{i} = 1$. Así $\sum\limits_{i=1}^{1} H_i = H_1 = 1 \quad \therefore H_1 = 2H_1 - 1 \Rightarrow 1 = 2 \cdot 1 - 1$.

ii) Sea $\sum\limits_{i=1}^{n} H_i = (n+1)H_n - n$ algun $n \in I\!N$ **(0.5 ptos.)**

iii) Por demostrar que $\sum\limits_{i=1}^{n+1} H_i = (n+2)H_{n+1} - (n+1)$.

En efecto $\sum\limits_{i=1}^{n+1} H_i = \sum\limits_{i=1}^{n} H_i + H_{n+1} = \underbrace{(n+1)H_n - n}_{\text{hipotesis}} + H_{n+1} \quad \circledast$.

Pero $H_{n+1} = \sum\limits_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i} = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i} + \frac{1}{n+1} = H_n + \frac{1}{n+1}$.

Entonces $H_n = H_{n+1} - \frac{1}{n+1}$.

Reemplazando en $\circledast \sum_{i=1}^{n+1} H_i = (n+1)\left[H_{n+1} - \frac{1}{n+1}\right] - n + H_{n+1}$.

Así $\sum_{i=1}^{n+1} H_i = (n+1)H_{n+1} - 1 - n + H_{n+1} = (n+2)H_{n+1} - (n+1)$. **(1.5 ptos.)**

c) Demuestre que $\sum_{k=0}^{n} (1-x)^k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n+1}{k+1} x^k \quad \forall n \in I\!N$.

Primera forma. (Inducción sobre n)

i) Para $n = 0 \quad \sum_{k=0}^{0} (1-x)^k = \sum_{k=0}^{0} (-1)^k \binom{1}{k+1} x^k \Rightarrow (1-x)^0 = (-1)^0 \binom{1}{1} x^0 \Rightarrow 1 \equiv 1$.

ii) Sea $\sum_{k=0}^{n} (1-x)^k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n+1}{k+1} x^k$ algun $n \in I\!N$. **(0.5 ptos.)**

iii) P.dem. que: $\sum_{k=0}^{n+1} (1-x)^k = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+2}{k+1} x^k$.

En efecto $\sum_{k=0}^{n+1} (1-x)^k = \sum_{k=0}^{n} (1-x)^k + (1-x)^{n+1} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n+1}{k+1} x^k}_{\text{hipótesis}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} x^k}_{\text{Binomio}}$

$= \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k+1} x^k + \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} x^k$ en que el término en $n+1$ en la hipótesis no altera la suma ya que $\binom{n+1}{n+2} = 0$.

$= \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \underbrace{\left[\binom{n+1}{k+1} + \binom{n+1}{k}\right]}_{\text{Pascal}} x^k = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+2}{k+1} x^k$ **(1.5 ptos.)**

Segunda Forma. (como suma geométrica)

$\sum_{k=0}^{n} (1-x)^k$ es una suma geométrica: Así $\sum_{k=0}^{n} (1-x)^k = \frac{1-(1-x)^{n+1}}{1-(1-x)}$.

Entonces $\sum_{k=0}^{n} (1-x)^k = \frac{1-(1-x)^{n+1}}{x} = \frac{1 - \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} x^k}{x} = \frac{1 - \left(\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} x^k + 1\right)}{x}$

$= \frac{- \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} x^k}{x} = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \binom{n+1}{k} x^{k-1} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n+1}{k+1} x^k$

0.5 ptos. (uso de la suma geométrica)+1.5 ptos. (conclusión)

Problema 3

Sea A un conjunto no vacío y $f : A \to A$ una función que satisface la condición $\circledast$ siguiente: $\exists n \in I\!N - \{0\}$ tal que $f^{(n)} = id_A$, donde para $n \geq 1$ definimos $f^{(n)} = f \circ f \circ \ldots \circ f$, es decir, la composición de f con si misma n veces.

Se define en A la realación R por

$$xRy \Leftrightarrow \exists k \in \{1, 2, \ldots, n\} \text{ tal que } f^{(k)}(x) = y$$

a) Demuestre que R es relación de equivalencia

i) R es refleja ssi $\forall a \in A, aRa \Leftrightarrow \forall a \in A \quad \exists k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ t.q. $f^{(k)}(a) = a$.
Esto es inmediato si $k = n$ y segun $\circledast \quad f^{(n)}(a) = id_A(a) = a$. **(0.5 ptos.)**

ii) R debe ser simétrica, es decir $xRy \Rightarrow yRx$.
Sea xRy, es decir $\exists k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ t.q. $f^{(k)}(x) = y$.
Componiendo esta igualdad por $f^{(n-k)}$ se tiene $f^{n-k}\big(f^{(k)}(x)\big) = f^{(n-k)}(y)$ pero $f^{(n-k)} \circ f^{(k)} = f^{(n)}$ ($n-k$ veces $+k$ veces $= n$ veces)
Así $f^{(n-k+k)}(x) = f^{(n-k)}(y) \Rightarrow f^{(n-k)}(y) = f^{(n)}(x) = id_A(x) = x$ segun $\circledast$.
Como $k \in \{1, 2, \ldots, n\} \Rightarrow (n-k) \in \{1, 2, \ldots, n\}$ entonces $f^{(n-k)}(y) = x \Rightarrow yRx$.
Si $k = n, f^{(n)}(x) = y \Rightarrow f^{(n)}(y) = x \Rightarrow yRx$.

iii) R debe ser transitiva, es decir $xRy \quad \wedge \quad yRz \Rightarrow xRz$.
Sea $xRy \quad \wedge \quad yRz \Rightarrow \exists k_1, k_2 \in \{1, 2, \ldots, n\}$ t.q.
$f^{(k_1)}(x) = y \quad \wedge \quad f^{(k_2)}(y) = z \Rightarrow f^{(k_2)}\big(f^{(k_1)}(x)\big) = z \Rightarrow f^{(k_1+k_2)}(x) = z$.
Si $k_1 + k_2 \in \{1, 2, \ldots, n\} \Rightarrow xRz$.
Si $n < k_1 + k_2 \leq 2n \Rightarrow k_1 + k_2 = n + p$ con $p \in \{1, 2, \ldots, n\}$
Así $f^{(k_1+k_2)}(x) = f^{(n+p)}(x) = f^{(n)}\big(f^{(p)}(x)\big) = f^{(p)}(x) = z \Rightarrow xRz$. **(1.5 ptos.)**
Entonces R es refleja simetrica y transitiva, es decir, es relación de Equiv.
OBS.: Los casos en que $k = n$ o $k_1 = k_2 = n$ son solo particulares y no se exigen.

b) Considere $A = \{0, 1\}^3 = \{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \{0, 1\}$ y $f : A \to A$ definida por $f(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_3, x_1)$.

b.1) Pruebe que f satisface $\circledast$.
En efecto $f(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_3, x_1)$
$\Rightarrow f(f(x_1, x_2, x_3)) = f(x_2, x_3, x_1) = (x_3, x_1, x_2)$
$\Rightarrow f(f(f(x_1, x_2, x_3))) = f(x_3, x_1, x_2) = (x_1, x_2, x_3)$
Así $f^{(3)}(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3) = id_A(x_1, x_2, x_3)$.
De modo que $\exists n \in I\!N - \{0\}(n = 3)$ t.q. $f^{(3)} = id_A$ **(1.0 pto.)**

b.2) Determine y describa todas las clases de equivalencia inducidas por R en A.
Los elementos de $\{0, 1\}^3$ son
$\{0, 1\}^3 = \{(0, 0, 0), (1, 1, 1), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)\}$
y para $(a, b, c) \in \{0, 1\}^3, C_{(a,b,c)} = \{(x, y, z) \in \{0, 1\}^3 / \exists k \in \{1, 2, 3)$ t.q. $f^{(k)}(a, b, c) = (x, y, z)\}$
(0.5 ptos.)

Así,

$$C_{(0,0,0)} = \{(0, 0, 0)\}$$
$$C_{(1,1,1)} = \{(1, 1, 1)\}$$

(0.5 ptos.)

Para $C_{(0,0,1)}$ se tiene que $f^{(1)}(0, 0, 1) = (0, 1, 0) \wedge \; f^{(2)}(0, 0, 1) = (1, 0, 0) \wedge \; f^{(3)}(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$ con $1, 2, 3 \in \{1, 2, 3\}$.
De modo que $C_{(0,0,1)} = \{(0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ **(0.5 ptos.)**
Analogamente $C_{(0,1,1)} = \{(0, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 1)\}$ **(0.5 ptos.)**
El conjunto de las clases, o conjunto cuociente será:

$$\{0, 1\}^3 / R = \{C_{(0,0,0)}, C_{(1,1,1)}, C_{(0,0,1)}, C_{(0,1,1)}\}$$