Pauta Control 2 MA11A ALGEBRA
Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile
Semestre 2006-1

P1.

i) Demuestre, usando inducción que:

$$(2n)! < 2^{2n}(n!)^2 \quad \forall n \geq 1$$

Para $n = 1, (2 \cdot 1)! < 2^{2 \cdot 1}(1!)^2 \Leftrightarrow 2 < 4$ que es verdadero

Sea $(2n)! < 2^{2n}(n!)^2$ algún $n \in \mathbb{N}$ (Hip. Inductiva) (0.5 ptos.)

Por demostrar que $[2(n+1)]! < 2^{2n+2}[(n+1)!]^2$

En efecto

$$\begin{aligned}(2n+2)! &= (2n)!(2n+1)(2n+2)\\ &< 2^{2n}(n!)^2(2n+1)(2n+2) \text{ por hipótesis}\\ &< 2^{2n}(n!)^2(2n+2)(2n+2) \text{ mayorando } 2n+1 < 2n+2\\ &= 2^{2n}(n!)^2 2^2(n+1)^2 = 2^{2n+2} \cdot [n!(n+1)]^2\\ &= 2^{2n+2}[(n+1)!] \rightarrow \text{ Tesis}\end{aligned}$$

(1.5 ptos.)

ii) Demuestre $(1+x)(1+x^2)(1+x^{2^2})...(1+x^{2^{n-1}}) = \frac{x^{2^n}-1}{x-1} \forall n \geq 1, x \neq 1$

Por inducción sobre n $\quad n = 1$ P.d. que $(1 + x^{2^{1-1}}) = \frac{x^{2^1}-1}{x-1}$

$$\Leftrightarrow 1 + X^{2^0} = \frac{x^2-1}{x-1} \Leftrightarrow 1 + x = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = x + 1$$

se cumple

Sea $(1+x)(1+x^2)...(1+x^{2^{n-1}}) = \frac{x^{2^n}}{x-1}$ algún $n \in \mathbb{N}$ (H.I) (1.0 pto.)

P.d. que $\underbrace{(1+x)(1+x^2)...(1+x^{2^{n-1}})}_{\text{hipótesis}}(1+x^{2^n}) = \frac{x^{2^{(n+1)}}}{x-1}$

$$\frac{x^{2^n}-1}{x-1} \cdot (1+x^{2^n}) = \frac{(x^{2^n})^2-1}{x-1} = \frac{x^{2^n+2^n}-1}{x-1}$$

$= \frac{x^{2 \cdot 2^n}-1}{x-1} = \frac{x^{2^{n+1}}-1}{x-1} \rightarrow$ Tesis (1.0 pto.)

iii) Sea A un conjunto infinito y $f : A \to \mathbb{N}$ una función tal que:

$$(\forall n \in \mathbb{N}), f^{-1}[\{n\}] \text{ es finito o numerable.}$$

Demuestre que A es infinito numerable.

Como $f : A \to \mathbb{N}$, entonces $A = f^{-1}(\mathbb{N})$ infinito.

pero $f^{-1}(\mathbb{N}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}[\{n\}]$, es decir, $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}[\{n\}]$ en que, por hipótesis, $\forall n \in \mathbb{N}, f^{-1}[\{n\}]$ es infinito o numerable. Así, A es la unión numerable de conjuntos finitos o numerables.

(1.0 pto.)

Por lo tanto, A es infinito numerable (Prop. vista en clases). (1.0 pto.)

Control 2 MA11A ALGEBRA
Pauta Problema 2

a) Calcule la suma $\sum\limits_{k=0}^{n} k7^k\binom{n}{k}$.

$$\sum_{k=0}^{n} k\cdot 7^k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} k\cdot 7^k\binom{n}{k} + 0\cdot 7^0\binom{n}{0} = \sum_{k=1}^{n} k\frac{\overbrace{n!}^{n(n-1)!}}{k!(n-k)!}7^k$$

$$= n\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}7^k = n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}7^k = n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\cdot 7^{k+1} \text{ cambio del indices}$$

(1.0 pto.)

$$= 7n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}7^k = 7n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}7^k\underbrace{1^{n-1-k}}_{1} = 7n(7+1)^{n-1} \text{ binomio}$$

Asi, $\sum\limits_{k=0}^{n} k7^k\binom{n}{k} = 7n8^{n-1}$ (1.0 pto.)

b) i) Demuestre que $\forall n,i,k\in\mathbb{N}$ con $k\leq i\leq n$

$$\binom{n}{i}\binom{i}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{i-k}$$

En efecto $\binom{n}{i}\binom{i}{k} = \frac{n!}{i!(n-k)!}\cdot\frac{(i!}{k!(i-k)!} = \frac{n!}{k!(n-i)!(i-k)!}$ y $\binom{n}{k}\binom{n-k}{i-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{(n-k)!}{(i-k)!(n-i)!} = \frac{n!}{k!(i-k)!(n-i)!}$

Desarrollos iguales (1.5 ptos.)

ii) Utilice (i) para probar, sin uso de inducción, que:

$$\sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i}\binom{i}{k} = \binom{n}{k}2^{n-k}$$

En efecto

$$\sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i}\binom{i}{k} \overset{\text{según (i)}}{=} \sum_{i=k}^{n}\binom{n}{k}\binom{n-k}{i-k} = \binom{n}{k}\sum_{i=k}^{n}\binom{n-k}{i-k}(\text{ en que }\binom{n}{k}\text{ no depende de } i)$$

$$= \binom{n}{k}\sum_{i=0}^{n-k}\binom{n-k}{i} \text{ (cambio de índices)}$$

(1.0 pto.)

$$= \binom{n}{k}2^{n-k} \text{ (Propiedad } \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k} = 2^p)$$

(0.5 ptos.)

iii) Calcule, usando (ii)

$$\sum_{k=0}^{n}\left[\sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i}\binom{i}{k}\right]$$

$$\sum_{k=0}^{n}\left[\sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i}\binom{i}{k}\right]=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{n-k}\cdot\underbrace{1^k}_{1}=\underbrace{(2+1)^n}_{\text{binomio}}$$

Entonces $\sum_{k=0}^{n}\left[\sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i}\binom{i}{k}\right]=3^n$ (1.0 pto.)

Control 2 MA11A ALGEBRA
Pauta Problema 3

a) Sea E un conjunto y $A \neq \phi$ un subconjunto fijo de E. Se define en $\mathcal{P}(E)$ la relación $\mathcal{R}$ por:

$$X\mathcal{R}Y \Leftrightarrow A \cap X = A \cap Y$$

a.1) Demuestre que $\mathcal{R}$ es relación transitiva.

i) $\mathcal{R}$ es refleja ssi $X\mathcal{R}X \quad \forall X \in \mathcal{P}_{(E)}$
En efecto $X\mathcal{R}X \Leftrightarrow A \cap X = A \cap X$ que es verdadero (0.3 ptos.)

ii) Simétrica. Sea $X\mathcal{R}Y \Leftrightarrow A \cap X = A \cap Y$

$$\Leftrightarrow A \cap Y = A \cap X \Leftrightarrow Y\mathcal{R}X$$

(0.3 ptos.)

por lo tanto $\mathcal{R}$ es simétrica.

iii) Transitividad: Sea $X\mathcal{R}Y \wedge Y\mathcal{R}Z \Leftrightarrow$

$$A \cap X = A \cap Y \wedge A \cap Y = A \cap Z \Rightarrow A \cap X = A \cap Z \Leftrightarrow X\mathcal{R}Z$$

es decir $\mathcal{R}$ es relación transitiva. (0.4 ptos.)

Entonces $\mathcal{R}$ es relación de equivalencia.

a.2) Demuestre que el conjunto cuociente $\mathcal{P}(E)/\mathcal{R} = \{[X]/X \in \mathcal{P}(A)\}$
Sea $[W] \in \mathcal{P}(E)/\mathcal{R}$ con $W \subseteq E$.
Probaremos que $[W] \in \{[X]/x \in \mathcal{P}\}$ que equivale a probar que

$$\exists X \subseteq A \text{ tal que } [X] = [W]$$

En efecto, basta tomar $X = A \cap W$ de donde $X \subseteq A$ y

$$A \cap X = A \cap (A \cap W) = A \cap W \text{ de donde } X\mathcal{R}W$$

equivalente a $[X] = [W]$.
Así $[W] \in \{[X]/X \in \mathcal{P}(A)\}$. Entonces $\mathcal{P}(E)/\mathcal{R} \subseteq \{[X]\}/X \in \mathcal{P}(E)/\mathcal{R}$. (1.5 ptos.)
Recíprocamente, sea $[W] \in \{[X]\}/X \in \mathcal{P}(A)\}$, es decir $\exists X \subseteq A \subseteq E; [W] \in [X]$ entonces $[W] = [X] \in \mathcal{P}(E)/\mathcal{R}$.
Así $\{[X]/X \in \mathcal{P}(A)\} \subseteq \mathcal{P}(E)/\mathcal{R}$. Se concluye que $\mathcal{P}(E)/\mathcal{R} = \{[X]/X \in \mathcal{P}(A)\}$ (0.5 ptos.)

a.3) Demuestre que para $X, Y \in \mathcal{P}(A)$ se tiene que

$$X \neq Y \Rightarrow [X] \neq [Y]$$

En efecto, sea $X \neq Y$.

Como $X, Y \subseteq A \Rightarrow A \cap X = X \wedge A \cap Y = Y$

de donde $A \cap X \neq A \cap Y \Rightarrow X$ no está relacionado con $Y \Rightarrow [X] \neq [Y]$ (1.0 pto.)

Observación. También puede usarse la forma contrarecíproca

$$[X] = [Y] \Rightarrow X = Y$$

Si $[X] = [Y] \Leftrightarrow X\mathcal{R}Y \Leftrightarrow \overbrace{A \cap X}^{X} = \overbrace{A \cap Y}^{Y}$ pero $X, Y \subseteq A$

$\rightarrow X = Y$

b) Sea $f : A \rightarrow B$ una función y τ una relación de orden en B. Se define la relación Ω en A como $x\Omega y \Leftrightarrow f(x)\tau f(y)$. Demuestre que Ω es relación de orden en A, si y solo si f es inyectiva.

($\Rightarrow$) Si Ω relación de orden $\Rightarrow f$ es inyectiva.

Sea $f(x) = f(y)$. Como τ es relación de orden en B, es refleja

Así $f(x)\tau f(y) \wedge f(y)\tau f(x)$ (por la igualdad) (0.5 ptos.)

$\Leftrightarrow X\Omega Y \wedge Y\Omega X$, pero Ω es de orden y por lo tanto antisim.

$\Rightarrow x = y$. Así, f es inyectiva. (0.5 ptos.)

($\Leftarrow$) Si f es inyectiva $\Rightarrow \Omega$ es relación de orden.

Es inmediato que Ω es refleja pues $\forall x, x\Omega x \Leftrightarrow f(x)\tau f(x)$ que se cumple por ser τ refleja (τ es de orden). Además si $x\Omega z \wedge y\Omega z \Leftrightarrow f(x)\tau f(y) \wedge f(y)\tau f(z)$

$\Rightarrow f(x)\tau f(z)$ (τ es transitiva) $\Leftrightarrow X\Omega Z$. (0.5 ptos.)

Entonces Ω es transitiva.

Para la antisimetría sea $x\Omega y \wedge y\Omega x \Leftrightarrow f(x)\tau f(y) \wedge f(y)\tau f(x)$

$\Rightarrow f(x) = f(y)$ pués τ es antisimétrica.

Pero f es inyectiva, así $f(x) = f(y) = x = y$. Entonces Ω es antisimétrica. Se concluye que Ω es relación de orden en A. (0.5 ptos.)