Fecha: 20 de junio del 2002
Tiempo: 3 horas

Pauta Control 3 MA-11A Álgebra

1. (a)
   - Primero veamos que $e \in G_+ \cap G_-$. En efecto, por la reflexividad de las relaciones de orden se tiene que $e \in G_+$ pues $e \preceq e$ y también $e \in G_-$ pues $e \preceq e$.

     [0/0.6 ptos]

   - Sea $x \in G_+ \cap G_-$. Debemos probar que $x = e$. En efecto, como $x \in G_+$, se tiene que $e \preceq x$. Como $x \in G_-$, se tiene que $x \preceq e$. Por la antisimetría de las relaciones de orden, se concluye que $e = x$.

     [0/0.6 ptos]

   (b) Sea $x \in G_+$. Es decir, sabiendo que $e \preceq x$ debemos concluir que $x^{-1} \in G_-$. En efecto: por la propiedad de $\preceq$, sabemos que $e * x^{-1} \preceq x * x^{-1}$. O sea, $x^{-1} \preceq e$, que significa que $x^{-1} \in G_-$.

   [0/1.2 ptos]

   (c) Sean $x, y \in G_+$. Debemos concluir que $x * y \in G_+$. En efecto:

   $$x * y \in G_+ \iff e \preceq x * y \iff x^{-1} \preceq y$$

   [0/0.6 ptos]

   Pero obviamente $x^{-1} \preceq y$. En efecto: como $x^{-1} \preceq e$ (por la parte (b)) y como $e \preceq y$ (por hipótesis), el resultado se tiene por la transitividad de las relaciones de orden.

   [0/0.6 ptos]

   (d)
   - Obviamente $G_+ \cup G_- \subseteq G$.

     [0/0.2 ptos]

   - Sea $x \in G$. Como por hipótesis el orden $\preceq$ es total, se tiene que o bien $x \preceq e$ o bien $e \preceq x$. En el primer caso se tendría $x \in G_-$ y en el segundo caso se tendría $x \in G_+$. Es decir, $x \in G_+ \cup G_-$.

     [0/1 pto]

2. (a) i.

$$\begin{aligned} 3\varphi(([1],0)) &= \varphi(([1],0)) + \varphi(([1],0)) + \varphi(([1],0) \\ &= \varphi(([1],0) \oplus ([1],0) \oplus ([1],0)) \\ &= \varphi(([0],0)) \end{aligned}$$

`[0/1 pto]`

Pero como $([0],0)$ es el neutro de $(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}, \oplus)$ y $\varphi : \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ es un homomorfismo de $(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}, \oplus)$ sobre el grupo $(\mathbb{Z}, +)$, se tiene que $\varphi(([0],0)) = 0$. Es decir $3\varphi(([1],0)) = 0$ y por lo tanto $\varphi(([1],0)) = 0$.

`[0/1 pto]`

ii. Sea $\varphi : \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ un isomorfismo de $(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}, \oplus)$ sobre $(\mathbb{Z}, +)$. Por la parte (i) se tendría que $\varphi(([1],0)) = \varphi(([0],0)) = 0$. O sea, la función φ no sería inyectiva. Esto es una contradicción.

`[0/1 pto]`

(b) i. Basta con exhibir un subconjunto infinito de E. Consideremos, por ejemplo, $E' \subseteq E$ con

$$E' = \{(\underbrace{-1, \ldots, -1}_{n}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{n}) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

`[0/1.5 ptos]`

ii. Notar que $E \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{-1, 1\}^n$. Es decir, E está contenido en la unión numerable de conjuntos finitos. O sea, $|E| \leq |\mathbb{N}|$. Por la parte (i) se concluye que $|E| = |\mathbb{N}|$.

`[0/1.5 ptos]`

3. (a) Debemos probar que el conjunto $\{h \in H \mid h > 0\}$ tiene algún elemento. Sea $x \in H$ tal que $x \neq 0$ (este x existe pues $H \neq \{0\}$). Si $x > 0$ se tiene que $x \in \{h \in H \mid h > 0\}$. Si $x < 0$ se tiene que, como H es grupo, $-x \in H$. Luego $(-x) \in \{h \in H \mid h > 0\}$.

`[0/0.5 ptos]`

(b) Sea $x \in d\mathbb{Z}$. Es decir, $x = dk$ para algún $k \in \mathbb{Z}$. Debemos probar que $x \in H$.

- Caso 1: $k = 0$.
  Aquí $x = 0$ y, como $(H, +)$ es subgrupo de $(\mathbb{Z}, +)$, el neutro $0 \in H$.

`[0/0.5 ptos]`

- Caso 2: $k \geq 1$.
  Aquí $x = \underbrace{d + \cdots + d}_{k}$. Como $d \in H$ y H es cerrado para la operación $+$, se tiene que $x \in H$.

  `[0/0.5 ptos]`

- Caso 3: $k \leq -1$.
  Aquí $x = \underbrace{(-d) + \cdots (-d)}_{|k|}$. Como $-d \in H$ (H es grupo) y H es cerrado para la operación $+$, se tiene que $x \in H$.

  `[0/0.5 ptos]`

(c) Sea $h \in H$ con $h > 0$ y consideremos también el elemento $d = \min\{h \in H |\ h > 0\}$. Por el Teorema, existe un único par $q, r \in \mathbb{N}$ tal que $h = qd + r$ y $0 \leq r < d$. Por la parte (b) sabemos que $qd \in H$, y luego $r = h - qd \in H$ (ya que $-qd \in H$, $h \in H$, y la operación es cerrada). Si $r > 0$ habría una contradicción pues existiría un $r \in H$ tal que $0 < r < d$. O sea, $r = 0$ y se concluye que $h = qd$ con $q > 0$.

`[0/1.5 ptos]`

(d) Ya sabemos que $d\mathbb{Z} \subseteq H$. Debemos probar que $H \subseteq d\mathbb{Z}$. Sea $h \in H$. Lo que se debe hacer es escribir h de la forma dk con $k \in \mathbb{Z}$.

- Caso 1: $h = 0$
  Obviamente, $h = d0$.
- Caso 2: $h > 0$
  Aquí se deduce, por (c), que $h = dq$ con $q > 0$.
- Caso 3: $h < 0$
  Se tiene que $-h > 0$ y luego, por (c), $-h = dq$ con $q > 0$. Se concluye que $h = d(-q)$ con $-q < 0$.

`[0/1.5 ptos]`