U. DE CHILE

INGENIERIA

Pauta Control #3 MA11A Algebra

Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile.

Año 2004

El objetivo de esta pauta es orientar la corrección de los ayudantes y dar al alumno una guía de estudio. Es *responsabilidad del alumno* tener una copia de esta pauta para el día de la revisión de su prueba (Vi 02/06 18:00). Esta se puede obtener vía `http://www.dim.uchile.cl/~lmella/MA11A.html` en formato ps o pdf.

Pauta Control 3

Algebra MA11A

Problema 1

(i) Sean $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ y $\omega = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Encuentre el menor entero $n > 0$ tal que $z^n = \omega^n = 1$

$$z = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow |z| = 1,\ arg(z) = \frac{\pi}{4};\ z = e^{i\frac{\pi}{4}}$$
$$\omega = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow |\omega| = 1,\ arg(\omega) = \frac{\pi}{3};\ w = e^{i\frac{\pi}{3}}$$
$$\text{Entonces } z^n = \omega^n = 1 \Rightarrow (e^{i\frac{\pi}{4}})^n = (e^{i\frac{\pi}{3}})^n = 1$$
$$\Rightarrow e^{i\frac{n\pi}{4}} = e^{i\frac{n\pi}{3}} = 1 = e^{i0}$$

(1.0 ptos)

Las situaciones posibles son $e^{i\frac{n\pi}{4}} = 1 \Leftrightarrow \frac{n\pi}{4} = 2k\pi \Leftrightarrow n = 8k,\ k > 0 \Leftrightarrow 8|n$
también $e^{i\frac{n\pi}{3}} = 1 \Leftrightarrow \frac{n\pi}{3} = 2k\pi \Leftrightarrow n = 6k,\ k > 0 \Leftrightarrow 6|n$

Como $n > 0$, el menor valor de n compatible con los dos casos es $n = 24$.
(1.0 ptos)

(ii) Los complejos $z_1, z_2, ..., z_p$ son tales que $|z_i| = 1, \forall i \in \{1, 2, .., p\}$. Demuestre que si $\sum_{i=1}^{p} z_i = a \in I\!R$ entonces $\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{z_i} = a$

Para calcular $\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{z_i}$ es conveniente transformar $\frac{1}{z_i} \forall i \in \{1, 2, .., p\}$

$\frac{1}{z_i} = \frac{\bar{z}_i}{z_i\bar{z}_i} = \frac{\bar{z}_i}{|z_i|^2} = \frac{\bar{z}_i}{1^2} = \bar{z}_i \quad (|z_i| = 1 \Rightarrow |z_i|^2 = 1)$
(1.0 ptos) Entonces $\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{z_i} = \sum_{i=1}^{p} \bar{z}_i = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 + ... + \bar{z}_p = \overline{\sum_{i=1}^{p} z_i}$

Así $\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{z_i} = \overline{\sum_{i=1}^{p} z_i} = \bar{a} = a$ pues si $a \in I\!R$ $\bar{a} = a$
(1.0 ptos) Por lo tanto $\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{z_i} = a$ (OBS = También puede desarrollarse en forma polar, 2.0 ptos).

(iii) Encuentre todos los morfismos de $(\mathbb{Z}_3, +_3)$ en $(\mathbb{C}\text{-}\ \{0\},\ \cdot\ )$

Como ambos son grupos con neutros $[0] \in \mathbb{Z}_3$ y $1 \in (\mathbb{C} - \{0\})$ se cumple que, como φ es un morfismo, $\varphi([0]) = 1$

Además $\varphi([0]) = \varphi([3]) = \varphi([1] + [1] + [1]) = \varphi([1]) \cdot \varphi([1]) \cdot \varphi([1]) = \varphi([1])^3 = 1^3 = 1$

Es decir $\varphi([1]) = \omega$ debe ser una raíz cúbica de la unidad.
(1.0 ptos)

Esto determina que hay solo 3 morfismos posibles de $(\mathbb{Z}_3, +_3)$ en $(\mathbb{C}\text{-}\ \{0\},\ \cdot\ )$
definidos por $\varphi([0]) = 1 \wedge \varphi([1]) \in \{1,\omega,\omega^2\}$

En que ω es raíz cúbica de 1

Los morfismos son:

$$\varphi_o([0]) = 1 \quad \varphi_o([1]) = 1 \quad \varphi_o([2]) = 1$$
$$\varphi_1([0]) = 1 \quad \varphi_1([1]) = \omega; \quad \varphi_1([2]) = \omega^2$$
$$\varphi_2([0]) = 1 \quad \varphi_2([1]) = \omega^2; \quad \varphi_2([2]) = \omega^4 = \omega^3 \cdot \omega = 1 \cdot \omega = \omega$$

(1.0 ptos)

Problema 2

(i) Sea $(G, *)$ un grupo abeliano y $H = \{\ h : G \longrightarrow G/$ h es homomorfismo$\}$, es decir, H es el conjunto de las funciones que son homomorfismos de $(G, *)$ en $(G, *)$.
Se define en H la ley Δ por $(h_1 \Delta h_2)(x) = h_1(x) * h_2(x) \quad \forall h_1, h_2 \in H, \quad \forall x \in G$
Verifique que Δ es l.c.i en H y demuestre que (H, Δ) es grupo abeliano.

Δ es l.c.i en H si $\forall h_1, h_2 \in H,, \quad h_1 \Delta h_2 \in H,,$ es decir $h_1 \Delta h_2$ debe ser morfismo de $(G, *)$ en $(G, *)$.

Por demostrar que $\forall x, y \in G (h_1 \Delta h_2)(x * y) = (h_1 \Delta h_2)(x) * (h_1 \Delta h_2)(y)$

En efecto
$(h_1 \Delta h_2)(x * y) = (h_1(x * y) * h_2(x * y))$ Definición
$= (h_1(x) * h_1(y)) * (h_2(x) * h_2(y))$ h_1, h_2 son morfismos
$= (h_1(x) * h_2(x)) * (h_1(y) * h_2(y))$ Asociat. y Conmut. en $(G, *)$
$= (h_1 \Delta h_2)(x) * (h_1 \Delta h_2)(y)$ Definición

Por lo tanto $h_1 \Delta h_2 \in H$ **(1.0 pto)**

(H, Δ) es grupo abeliano si Δ es asociativa en H, existe neutro para Δ en H y cada $h \in H$ es invertible.

Asociatividad (0.5 ptos)

Sean $h_1, h_2, h_3 \in H$, $x \in G$

$[(h_1 \Delta h_2)\Delta h_3](x) = (h_1 \Delta h_2)(x) * h_3(x)$ Definición
$= (h_1(x) * h_2(x)) * h_3(x)$ Definición
$= h_1(x) * (h_2(x) * h_3(x))$ Asociat. en G
$= h_1(x) * (h_2 \Delta h_3)(x)$ Definición
$= [h_1 \Delta (h_1 \Delta h_2)](x)$ Definición

Conmutatitividad (0.5 ptos)
Sea $x \in G$, $h_1, h_2 \in H$
$(h_1 \Delta h_2)(x) = h_1(x) * h_2(x) = h_2(x) * h_1(x) = (h_2 \Delta h_1)(x)$
Puesto que $*$ es conmutativa en $(G, *)$

Existencia del Neutro (0.5 ptos)
Por demostrar que $\exists h_N \in H$ t.q $(h \Delta h_N)(x) = h(x), h \in H$
Entonces $(h \Delta h_N)(x) = h(x) * h_N(x) = h(x)$
Para esto basta tomar $h_N(x) = e \in G$ que verifica, además que es morfismo.

En efecto, $h_N(x * y) = e = e * e = h_N(x) * h_N(y)$
Elementos invertibles (0.5 ptos)

Por demostrar que $\forall h \in H, \exists f \in H tq (h \Delta f)(x) = h_N(x) = e$
Es decir, $f(x)$ es el único inverso en G de $h(x)$, $x \in G$.

Entonces $f(x) = (h(x))^{-1}$ pero $(h(x))^{-1} = h(x^{-1})$ en que x^{-1} es el inverso de $x \in G$ y h es homomorfismo.

Por lo tanto$f(x) = h(x^{-1}) \quad \forall x \in G$

Además, $f(x)$ es morfismo, pues:

$f(x * y) = h[(x * y)^{-1}] = h(y^{-1} * x^{-1}) = h(y^{-1}) * h(x^{-1}) = f(y) * f(x) = f(x) * f(y)$
en donde se han usado propiedades en el grupo $(G, *)$ y la conmutatividad de $*$.

(ii) Sea $(G, *)$ un grupo tal que $|G| = 3$ y $G = \{e, a, b\}$ con e neutro en G.
Pruebe que $a^{-1} = b$

Sabemos que $a * e = a \quad \wedge \quad b * e = b \quad (a, b, eson \neq s)$

Si $a * a = a \vee b * b = b \Rightarrow a = e \vee b = e \rightarrow\leftarrow$ y si $a * a = e$, necesariamente $a * b = b$, pero esto es $a = e \rightarrow\leftarrow$

Entonces solo es posible $a * a = b \wedge b * b = a$, de donde $a = b * a^{-1}$ es decir $b * b = b * a^{-1}$ y como en el grupo b es cancelable se concluye que $a^{-1} = b$

(2.0 ptos)

OTRA FORMA

Se puede también complementar la tabla de doble entrada:

*	e	a	b
e	e	a	b
a	e	?	?
b	b	?	?

Unica forma $\Rightarrow$

*	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

cualquier otra forma, repite elementos en filas o columnas.

Si se hace de esta forma debe argumentarse su contrucción.

OBS: Bajar 1.0 ptos o 0.5 ptos si faltan argumentos en cualquier forma.

Problema 3

(a) Considere el grupo abeliano $(G, \bullet)$
Para $k \in I\!N, k \geq 2$ se define $G^k = \{a^k / a \in G\}$ en que $a^k = a \bullet a \bullet a \bullet \cdots \bullet a$ (k veces)

(i) Demuestre que $(G^k, \bullet)$ es subgrupo de $(G, \bullet)$

Para demostrar que $(G^k, \bullet)$ es subgrupo de $(G, \bullet)$ puede usarse la forma compacta $G^k \neq \phi$ y
$\forall g_1, g_2 \in G^k \Rightarrow g_1 \bullet g_2^{-1} \in G^k$
Sea $a \in G$, entonces $a^k \in G^k$, es decir $G^k \neq \phi$

Sean $g_1, g_2 \in G^k$ entonces $\exists a, b \in G$ tq $g_1 = a^k \wedge g_2 = b^k$ con a,b invertibles, b^{-1} inverso de b en G.

Además $g_2^{-1} = (b^k)^{-1} = (b \bullet b \bullet b \bullet \cdots \bullet b)^{-1}$
Como en un grupo $(a * b)^{-1} = b^{-1} \bullet a^{-1}$, en este caso

$g_2^{-1} = (b \bullet b \bullet b \bullet \cdots \bullet b)^{-1} = (b^{-1} \bullet b^{-1} \bullet b^{-1} \bullet \cdots \bullet b^{-1}) = (b^{-1})^k \quad (k \text{ veces})$
(1.0 ptos)
Entonces $g_1 \bullet g_2^{-1} = a^k (b^k)^{-1} = (a \bullet a \bullet a \bullet \cdots \bullet a)(\bullet b^{-1} \bullet b^{-1} \bullet b^{-1} \bullet \cdots \bullet b^{-1})$

Como G es grupo abeliano, conmutando y asociando, $g_1 \bullet g_2^{-1}$ puede escribirse como $g_1 \bullet g_2^{-1} = (a \bullet b^{-1})^k$, en que $a \bullet b^{-1} \in G$

Por lo tanto $g_1 \bullet g_2^{-1} \in G^k$ **(1.0 ptos)**

(ii) En $((\mathbb{Z}_{53}^*)^2, \bullet_{53})$ determine el inverso de $[9]^2$
en que $\mathbb{Z}_{53}^* = \mathbb{Z}_{53} - \{[0]\}$ y $\bullet_{53}$ es el producto en $\mathbb{Z}_{53}$
Por la parte (i) sabemos que $((\mathbb{Z}_{53}^*)^2, \bullet_{53})$ es subgrupo de $((\mathbb{Z}_{53}^*), \bullet_{53})$ y $[1]^2 = [1]$ neutro de $(\mathbb{Z}_{53}^*)^2$

El inverso de $[9]^2$ en $(\mathbb{Z}_{53}^*)^2$ coincide con el inverso de $[9]^2$ en $\mathbb{Z}_{53}^*$ (porque $(\mathbb{Z}_{53}^*)^2$ es subgrupo de $\mathbb{Z}_{53}^*$). Pero $([9]^2)^{-1} = ([9]^{-1})^2 = [6]^2 = [36]$ (porque $[9] \bullet [6] = [54] = [1]$

o bién $9a \equiv 1 mod 53$ esto es $9 \cdot a - 1 = 53k$, $k \in \mathbb{Z}$ que se cumple para $a = b$
Por lo tanto $([9]^2)^{-1} = [6]^2 = [36]$ **(1.0 ptos)**

(b) Sea $(K, +_K, \bullet_K)$ un cuerpo y $(A, +_A, \bullet_A)$ un anillo con unidad y $f : K \longrightarrow A$ un homomorfismo, es decir $f : (K, +_K) \longrightarrow (A, +_A)$; $f : (K - \{0\}, \bullet_K) \longrightarrow (A - \{0\}, \bullet_A)$ y $f(1_K) = 1_A$.

Pruebe que:

(i) $f(x) \neq 0_A \Leftrightarrow x \neq 0_K$

(ii) f es inyectiva.

(i) $f(x) \neq 0_A \Leftrightarrow x \neq 0_K$
($\Rightarrow$) Sea $x \in K$ t.q $f(x) \neq 0_A$. Por demostrar que $x \neq 0_K$

en efecto, si $x = 0_K$, como f es homomorfismo entre los grupos $(K, +_K)$ y $(A, +_A)$ entonces $f(0_K) = 0_A$ que contradice la hipotesis.
Por lo tanto $f(x) \neq 0_A$ **(0.7 ptos)**

($\Leftarrow$) Sea $x \in K$, $x \neq 0_K$. Por demostrar que $f(x) \neq 0_A$
Como $x \neq 0_K$, x es invertible, es decir
$\exists x^{-1} \in K$ t.q $x \bullet_K x^{-1} = 1_K$ y por el morfismo $f(x \bullet_K x^{-1}) = f(x) \bullet_A f(x^{-1}) = f(1_K) = 1_A$

Entonces $f(x) \in A$ es invertible y por lo tanto $f(x) \neq 0_A$ **(0.8 ptos)**

(ii) f es inyectiva $ssi \forall x, y \in K \quad f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

Sean $x, y \in K$ t.q $f(x) = f(y)$
Como $f(x), f(y) \in A, \quad f(x) = f(y) \Rightarrow f(x) + (-f(y)) = 0_A$

Pero f es morfismo, por lo tanto $-f(y) = f(-y)$ y entonces $f(x) + (-f(y)) = f(x) + f(-y) = f(x - y) = 0_A$, pero solo puede ocurrir que $f(0_K) = 0_A$
esto es $\quad x - y = 0_K$

Por lo tanto $\quad x = y$ **(1.5 ptos)**