Pauta Control 3 MA-11A Algebra
Junio 1996

P1. (i) Notemos que ψ está bien definida pues $g\circ h\circ f^{-1}$ es una función si $h \in \mathcal{F}_{A,A'}$ de dominio $B = Dom(f^{-1})$ y recorrido $B' = Rec(g)$.

Para probar que ψ es biyectiva calcularemos su inversa. Sea $\bar{h} \in \mathcal{F}_{B,B'}$. Buscamos primero una función $h \in \mathcal{F}_{A,A'}$ tal que $\psi(h) = \bar{h}$:

$$\psi(h) = g\circ h\circ f^{-1} = \bar{h}$$

Componiendo con g^{-1} y f por la izquierda y la derecha respectivamente, y usando la asociatividad de la composición se tiene que

$$g^{-1}\circ\psi(h)\circ f = (g^{-1}\circ g)\circ h\circ(f^{-1}\circ f) = g^{-1}\circ\bar{h}\circ f$$

pero $g^{-1}\circ g = id_{A'}$ y $f^{-1}\circ f = id_A$, luego se tiene

$$(id_{A'}\circ h)\circ id_A = h = g^{-1}\circ\bar{h}\circ f.$$

Es decir, hemos probado que dado $\bar{h} \in \mathcal{F}_{B,B'}$ existe una única función $h \in \mathcal{F}_{A,A'}$ tal que $\psi(h) = \bar{h}$ y se calcula como

$$h = g^{-1}\circ\bar{h}\circ f, \text{ es decir } \psi^{-1}(\bar{h}) = g^{-1}\circ\bar{h}\circ f.$$

(ii) Supongamos h es inyectiva y sean $b, b' \in B$.

$$\begin{aligned}\psi(h)(b) = \psi(h)(b') &\Leftrightarrow g\circ h\circ f^{-1}(b) = g\circ h\circ f^{-1}(b')\\ (g \text{ biyectiva}) &\Rightarrow h\circ f^{-1}(b) = h\circ f^{-1}(b')\\ (h \text{ inyectiva}) &\Rightarrow f^{-1}(b) = f^{-1}(b')\\ (f \text{ biyectiva}) &\Rightarrow b = b'\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \psi(h) \text{ es inyectiva.}$$

Como ψ^{-1} tiene la misma forma que ψ, se prueba análogamente que si $\psi(h)$ es inyectiva entonces h es inyectiva.

(iii) Sea $h \in \mathcal{F}_{A,A'}$ sobreyectiva. Calculamos $\psi(h)(B)$:

$$\begin{aligned}\psi(h)(B) &= g\circ h\circ f^{-1}(B)\\ f \text{ biyectiva } \to &= g\circ h(f^{-1}(B)) = g\circ h(A)\\ h \text{ sobreyectiva } \to &= g(h(A)) = g(A')\\ g \text{ biyectiva } \to &= B'\end{aligned}$$

$\Rightarrow \psi(h)$ sobreyectiva.

Análogamente, y dada la forma de ψ^{-1}, se prueba que si $\psi(h)$ es sobreyectiva, entonces h también lo es.

P2. (i) Como $(G, *)$ es un grupo entonces se tiene que cada elemento $g \in G$ tiene un único inverso g^{-1}, es decir f es inyectiva. Por otro lado, dado $g \in G$ se tiene que $g = (g^{-1})^{-1}$, es decir existe un elemento en G que en este caso es g^{-1} cuya imagen por f es g. Esto prueba que f es sobreyectiva.
Entonces la pregunta se reduce a estudiar si:
f es un homomorfismo $\Leftrightarrow G$ es conmutativo.
$(\Rightarrow)$ si f es un homomorfismo se tiene que para cada par $g_1, g_2 \in G$

$$f(g_1 * g_2) = f(g_1) * f(g_2) = g_1^{-1} * g_2^{-1},$$

pero

$$f(g_1 * g_2) = (g_1 * g_2)^{-1} = g_2^{-1} * g_1^{-1}.$$

Probando que $g_1^{-1} * g_2^{-1} = g_2^{-1} * g_1^{-1}$. Para concluir que $*$ es conmutativa basta observar que todo elemento $g \in G$ es el inverso de otro elemento de G, que es g^{-1}.

$(\Leftarrow)$ Supongamos que $(G, *)$ es Abeliano y sean $g_1, g_2 \in G$. Entonces

$$\begin{aligned} f(g_1 * g_2) &= g_2^{-1} * g_1^{-1} \text{ (como en el punto anterior)} \\ f(g_1) * f(g_2) &= g_1^{-1} * g_2^{-1} \end{aligned}$$

Pero $(G, *)$ es conmutativo, luego $f(g_1 * g_2) = f(g_1) * f(g_2)$ probando que f es un isomorfismo.

(ii)
(a) La operación $\oplus$ es una ℓ.c.i. pues cada una de las coordenadas es una ℓ.c.i.
La asociatividad se deduce de la asociatividad por componente.
El neutro: $([0]_2, [0]_3) \oplus ([i]_2, [j]_3) = ([i]_2, [j]_3) \oplus ([0]_2, [0]_3) = ([i]_2, [j]_3)$.
Inversos: $([i]_2, [j]_3)^{-1} = ([-i]_2, [-j]_3)$.
(b) Si f es el isomorfismo deseado, debe cumplir que:

$$\begin{aligned} & f([1]_6) = ([1]_2, [1]_3) \\ \Rightarrow & f([2]_6) = f([1]_6 +_6 [1]_6) = ([1]_2 +_2 [1]_2, [1]_3 +_3 [1]_3) \\ & \qquad = ([0]_2, [2]_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f([3]_6) &= f([2]_6 + [1]_6) = ([0]_2 + [1]_2, [2]_3 + [1]_3) \\ &= ([1]_2, [0]_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow f([4]_6) = f([3]_6 + [1]_6) &= ([1]_2 + [1]_2, [0]_3 + [1]_3) \\
&= ([0]_2, [1]_3) \\
\Rightarrow f([5]_6) = f([4]_6 + [1]_6) &= ([0]_2 + [1]_2, [1]_3 + [1]_3) \\
&= ([1]_2, [2]_3) \\
\Rightarrow f([0]_6) = f([5]_6 + [1]_6) &= ([1]_2 + [1]_2, [2]_3 + [1]_3) \\
&= ([0]_2, [0]_3)
\end{aligned}$$

P3. (i) Como $A \subseteq \mathbb{Q}$ entonces A es finito o $|A| = \chi_0$. Veamos que A no es finito. Sea $A_0 = \{\frac{1}{2^{n+1}} \ / \ n \in \mathbb{N}\}$. Claramente $A_0 \subseteq A$ y existe una biyección

$$\begin{aligned}
&f : A_0 \to \mathbb{N}, \text{ luego } |A_0| = |\mathbb{N}| \\
&\frac{1}{2^{n+1}} \to n
\end{aligned}$$

y se deduce que A no es finito.

(ii) Sea f la función siguiente:

$$\begin{aligned}
f : \mathbb{N} &\to A \\
n &\sim f(n) = x_n
\end{aligned}$$

Si el resultado no es cierto, entonces f es inyectiva, luego $f(\mathbb{N}) \subseteq A$ será numerable e infinito que contradice la finitud de A pues un conjunto finito no tiene subconjutos infinitos.