## PAUTA CONTROL 3 - MA11A-ALGEBRA

(1998)

**Pregunta 1.**

(a) Probaremos la forma compacta de subgrupo. Es decir $H * K$ es subgrupo de $G$ si $\forall\ g_1, g_2 \in H * K,\ g_1 * g_2^{-1} \in H * K$ :

Sean $g_1 = h_1 * k_1$ y $g_2 = h_2 * k_2$ en $H * K$. Luego,

$$\begin{aligned} g_1 * g_2^{-1} &= (h_1 * k_1) * (h_2 * k_2)^{-1} \\ &= (h_1 * k_1) * (k_2^{-1} * h_2^{-1}) \\ &= (h_1 * k_1) * (h_2^{-1} * k_2^{-1}) \quad (\mathit{conmutatividad}) \\ &= (h_1 * h_2^{-1}) * (k_1 * k_2^{-1}) \quad (\text{asociatividad y conmutatividad}) \\ &= h * k \end{aligned}$$

donde $h = h_1 * h_2^{-1}$ y $k_1 = k_1 * k_2^{-1}$. Como $H$ y $K$ son subgrupos se tiene que $h \in H$ y $k \in K$. Luego $g_1 * g_2^{-1} = h * k \in H * K$. Esto prueba que $H * K$ es un subgrupo de $G$.

(b) Supongamos existe un tal $F : (G, *) \to (\mathbb{Z}, +)$. Entonces se tiene que $F(e) = 0$ y en cada $g \in G$ si $n$ es tal que $g^n = e$ se tendrá que:

$$\begin{aligned} &F(g^n) = F(g) + F(g) + \cdots + F(g) \text{ (n veces)} \\ &F(e) = n\ F(g) \\ &F\ (e)\ = 0 \\ &\Rightarrow\ n\ F(g) = 0 \Rightarrow\ n\ =\ 0\ \vee\ F(g) =\ 0 \end{aligned}$$

Como n $\geq 1$ se concluye que $F(g) = 0$ en cada $g \in G$.

(c) Probemos que en cada $a, b \in G$ se tiene que

$$a * b = b * a.$$

Como $(a * b)^{-1} = a * b$, basta probar que $(a * b) * (b * a) = e$.

Calculemos,

$$
\begin{aligned}
(a * b) * (b * a) &= a * ((b * b) * a) \\
&= a * (e * a) \\
&= a * a \\
&= e
\end{aligned}
$$

Con lo que se concluye por el comentario anterior que

$$a * b = b * a$$

**Pregunta 2.**

(a) Calculemos $\left(\overline{\frac{1}{1+Z^n}}\right)$ :

$$\left(\overline{\frac{1}{1+Z^n}}\right) = \frac{\overline{1}}{\overline{(1+Z^n)}} = \frac{1}{(\overline{1}+\overline{Z^n})} = \frac{1}{1+(\overline{Z})^n}$$

Luego,

$$\frac{1}{1+Z^n} + \frac{1}{1+(\overline{Z})^n} = \frac{1}{1+Z^n} + \left(\overline{\frac{1}{1+Z^n}}\right)$$
$$= 2\ Re\ \left(\frac{1}{1+Z^n}\right) \in I\!R$$

(b) Resolvamos $Z^4 = (\rho e^{i\Theta})^4 = Z_0$.

Para ello escribimos $Z_0$ en su forma polar. Observemos que vía racionalización se obtiene que,

$Z_0 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\ i$ , luego $|Z_0| = 1$ y su ángulo $\Theta_0 = \frac{2\pi}{3}$

$\Rightarrow \rho^4 e^{i4\Theta} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

$\Rightarrow \rho = 1 \quad \wedge \quad 4\Theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \qquad k = 0, 1, 2, 3$

$\Rightarrow \quad \Theta = \quad \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}, k = 0, 1, 2, 3.$

$\Rightarrow \tilde{Z}_0 = \frac{\pi}{6}$ , $\tilde{Z}_1 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}$ , $\tilde{Z}_2 = \frac{\pi}{6} + \pi$ , $\tilde{Z}_3 = \frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{2}$ son las soluciones

(c)

$$\begin{array}{rl} (\Leftarrow) \text{ si } Z_1 = Z_2 \ \Rightarrow & |Z_1 + Z_2| = 2|Z_1| = 2 \\ y & |Z_1| + |Z_2| = 1 + 1 = 2 \end{array}$$

luego la propiedad es cierta directamente.

$\Rightarrow$ Probemos la indicación. Suponemos $|Z| = 1 y$ $Re(Z) = 1$, es decir si

$$Z = a + bi \Rightarrow a^2 + b^2 = 1 \text{ y } a = 1$$

$\Rightarrow \qquad 1+b^2=1 \;\Rightarrow\; b=0$

Veamos ahora $(\Rightarrow)$. Suponemos que $|Z_1+Z_2|=|Z_1|+|Z_2|=2$

Luego,

$$|Z_1+Z_2|^2=|Z_1|^2+|Z_2|^2+\ 2\ |Z_1|\ |Z_2|$$
$$|Z_1+Z_2|^2=4$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
|Z_1+Z_2|^2 \ &= \ (ReZ_1+ReZ_2)^2 \ + \ (I_mZ_1+I_mZ_2)^2 \\
&= |Z_1|^2 \ + \ |Z_2|^2 \ + \ 2(ReZ_1)\cdot(ReZ_2) \ + \ 2(I_mZ_1) \ \cdot \ (I_mZ_2) \\
&= 2 \ + \ 2(ReZ_1)(ReZ_2) \ + \ 2(I_mZ_1)\cdot \ (I_mZ_2) \ = \ 4 \\
&\Rightarrow \qquad 1 \ + \ ReZ_1 \ ReZ_2 \ + \ I_mZ_1 \ I_mZ_2 \ = \ 2 \\
&\Rightarrow \qquad ReZ_1 \ ReZ_2 \ + \ I_mZ_1 \ I_mZ_2 \ = \ 1 \\
&\Rightarrow \qquad Re(Z_1\cdot\overline{Z}_2) \ = \ 1
\end{aligned}$$

Como $|Z_1\cdot\overline{Z}_2| \ = \ 1 \ \wedge \ Re(Z_1\cdot\overline{Z}_2) \ = \ 1 \qquad \Rightarrow \qquad Z_1\cdot\overline{Z}_2 \ = \ 1$

$$\Rightarrow \qquad Z_1\cdot\underbrace{\overline{Z}_2\cdot Z_2}_{|Z_2|^2} \ = \ Z_2 \ \Rightarrow \ Z_1 \ = \ Z_2$$

**Pregunta 3.**

(a) Observamos que claramente $\oplus$ y $\odot$ son erradas en $\mathbb{R}^2$. Además la estructura $(\mathbb{R}^2, \oplus)$ es un grupo Abeliano (se probó con $(\subseteq, +)$. Luego sólo hay que probar que,

- $\odot$ dist. sobre $\oplus$
- $\odot$ es conmutativo
- $\odot$ tiene unidad
- $\odot$ es asociativa

(b) Busquemos $(a,b)$ y $(c,d)$ tales que $(a,b) \odot (c,d) = (0,0)$, pero ellos no son nulos. Es decir,

$$a \cdot c = 0 \text{ y } b \cdot d = 0$$

Basta tomar: $(a,0)$ y $(0,b)$ con $a, b \neq 0$ o viceversa. Luego hay divisores de cero.

(c) Para probar que no son isomorfos, observemos que $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ es un cuerpo, luego no tiene divisores de cero.

Si existe $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$ biyectiva cambiando $+$ por $\oplus$ y $\cdot$ por $\odot$, luego $(\mathbb{R}^2, +, \odot)$ sería cuerpo y tampoco tendría divisores de cero, que por $(b)$ es falso. Luego estas 2 estructuras <u>no son isomorfas</u>.