Pauta Control #3 MA11A Algebra
Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile
Semestre 2005-1

El objetivo de esta pauta es orientar la corrección de los ayudantes y dar al alumno una guía de estudio. Es responsabilidad del alumno tener una copia de esta pauta para el día de la revisión de su prueba. Esta se puede obtener en la página:
http://www.dim.uchile.cl/~lmella/MA12A.html en formato ps o pdf.

Problema 1

i) Se define la relación $R \subseteq \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ por $z_1 R z_2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2|$.
Demuestre que R es relación de equivalencia y determine y grafique la clase de equivalencia del complejo $z_0 = 2 + i\sqrt{5}$.

- R es relación de equivalencia. En efecto
  1) R es refleja ssi $zRz \quad \forall z \in \mathbb{C} \Leftrightarrow |z| = |z|$ que es verdadero.
  2) R es simetrica. En efecto
     $z_1 R z_2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2| \Leftrightarrow |z_2| = |z_1| \Leftrightarrow z_2 R z_1$.
     Es decir $z_1 R z_2 \Rightarrow z_2 R z_1$.
  3) R es transitiva. En efecto
     $z_1 R z_2 \wedge z_2 R z_3 \Rightarrow |z_1| = |z_2| \wedge |z_2| = |z_3| \Rightarrow |z_1| = |z_3| \Rightarrow z_1 R z_3$.
     Es decir $z_1 R z_2 \quad \wedge \quad z_2 R z_3 \Rightarrow z_1 R z_3$ **(1.0 pto.)**
- La clase de $z_0 = 2 + i\sqrt{5}$ es $C_{2+i\sqrt{5}} = \{z \in \mathbb{C} / |z| = |2 + i\sqrt{5}|\}$ pero $|2 + i\sqrt{5}| = \sqrt{4+5} = 3$.
  Así $C_{2+i\sqrt{5}} = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 3\}$.
  Corresponden a los complejos situados en la circunferencia centrada en $0(0,0)$ y radio $r = 3$.

(1.0 pto.)

ii) Pruebe que $\forall n \in I\!N$ y $\rho \in I\!R$, el complejo
$z = (1 + \rho \ e^{i\pi/2})^n + (1 - \rho \ e^{i\pi/2})^n \in I\!R$.
Es inmediato que $e^{i\pi/2} = \cos \pi/2 + i \operatorname{sen} \pi/2 = i$.
Así $z = (1 + \rho\ i)^n + (1 - \rho\ i)^n$ pero $(\overline{1 + \rho\ i}) = (1 - \rho\ i)$ y tambien $(\overline{1 + \rho\ i})^n = (1 - \rho\ i)^n$. De modo que si $(1 + \rho\ i)^n = z_0 \Rightarrow (1 - \rho\ i)^n = \bar{z}_0$. **(1.5 ptos.)**
Sigue que $z = z_0 + \bar{z}_0 = 2R_e(z_0) \in I\!R$ (es real puro) **(0.5 ptos.)**
Observación: Hay otras formas (aunque más largas) de resolverlo.

iii) Sean $1, w_1, w_2, w_3, w_4$ las raices quintas de la unidad.
Demuestre que $(1 - w_1)(1 - w_2)(1 - w_3)(1 - w_4) = 5$.

- Es básico recordar que $w_1^k = w_k, w_1^5 = 1 \Rightarrow w_1^6 = w_1^5 \cdot w_1 = w_1$ y $w_1^7 = w_1^2 \ldots$ etc. Además $\sum_{k=0}^{5-1} w_k = 1 + w_1 + w_2 + w_3 + w_4 = 1 + w_1 + w_1^2 + w_1^3 + w_1^4 = 0. \qquad \circledast$ **(1.0 pto.)**

Desarrollando $(1 - w_1 - w_1^2 + w_1^3)(1 - w_1^3 - w_1^4 + w_1^7) = 1 - w_1^3 - w_1^4 + w_1^2 - w_1 + w_1^4$
$+ \underbrace{w_1^5}_{1} - w_1^3 - w_1^2 + \underbrace{w_1^5}_{1} + w_1^6 - w_1^4 + w_1^3 - \underbrace{w_1^6}_{w} - \underbrace{w_1^7}_{w_1^2} + \underbrace{w_1^{10}}_{1} = 4 - (\underbrace{w_1 + w_2 + w_3 + w_4}_{-1 \text{ de } \circledast}) = 4 - (-1) = 5$

(1.0 pto.)

Problema 2

a) Se define $S \subseteq \mathbb{C}$ por $S = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$.
Demuestre que $(S, \cdot)$ es grupo abeliano.

- Cerradura: Sean $z_1, z_2 \in S \Rightarrow |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| = 1 \cdot 1 = 1$
  $\Rightarrow z_1 \cdot z_2 \in S$ **(0.5 ptos.)**
- Asociatividad y conmutatividad son herencia de $(\mathbb{C}, \cdot)$. **(0.5 ptos.)**
- Neutro: $1 \in S$ pués $|1| = 1, \ \ 1 \in \mathbb{C}$. **(0.5 ptos.)**
- Inversos: Dado $z \in S$, por ejemplo $z = e^{i\varphi} \Rightarrow z^{-1} = e^{-i\varphi}$

$$\Rightarrow |z^{-1}| = |e^{-i\varphi}| = |\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi| = 1$$

  Así $|z^{-1}| = 1 \Rightarrow z^{-1} \in S$ **(0.5 ptos.)**
  $\therefore (S, \cdot)$ es grupo Abeliano.

b) i) Demuestre que si z es raíz n-ésima de la unidad $(n \geq 2)$ y n es divisor de m, entonces z es raíz m-ésima de la unidad.
(Indicación: $n \in I\!N$ es divisor de $m \in I\!N \Leftrightarrow \exists k \in I\!N$ t.q. $m = k \cdot n$)
En efecto, z raíz n-ésima de la unidad $\Rightarrow z^n = 1$.
Entonces $z^m = z^{k \cdot n} = z^{n \cdot k} = (z^n)^k = 1^k = 1 (m = k \cdot n)$.
Así: z es raíz m-ésima de la unidad. **(1.0 pto.)**

ii) Sea $U = \{z \in \mathbb{C} /$ para algun $n \in I\!N, n \geq 2, z$ es raíz n-ésima de la unidad$\}$.
Mostrar que $(U, \cdot)$ es subgrupo de grupo $(S, \cdot)$ del punto (a).
$(U, \cdot)$ es subgrupo de $(S, \cdot)$ si $U \neq \phi$ y

1) $\forall z_1, z_2 \in U \Rightarrow z_1 \cdot z_2 \in U$.
2) $\forall z \in U \Rightarrow z^{-1} \in U$.

$U \neq \phi$ pués, al menos $1 \in U (1^n = 1 \quad \forall n)$

1) En efecto, sean $z_1, z_2 \in U \Rightarrow \exists n_1, n_2 \in I\!N$ t.q. $z_1^{n_1} = 1 \quad \wedge \quad z_2^{n_2} = 1$.
Entonces $(z_1 \cdot z_2)^{n_1 \cdot n_2} = (z_1)^{n_1 \cdot n_2} \cdot (z_2)^{n_1 \cdot n_2} = (z_1^{n_1})^{n_2} \cdot (z_2^{n_2})^{n_1} = 1^{n_2} \cdot 1^{n_1}$.
$= 1 \cdot 1 = 1$
Así $(z_1 \cdot z_2)^p = 1$ en que $p = n_1 \cdot n_2 \in I\!N \Rightarrow z_1 \cdot z_2 \in U$ **(1.5 ptos.)**
2) Sea $z \in U \Rightarrow \exists n \in I\!N$ t.q. $z^n = 1$.
$\Rightarrow (z^n)^{-1} = 1^{-1} = 1 \Rightarrow (z^{-1})^n = 1 \Rightarrow z^{-1} \in U$ **(1.5 ptos.)**

OBS. También se puede probar con $z_1, z_2 \in U \Rightarrow z_1 \cdot z_2^{-1} \in U$

Problema 3

Sea $(G, *)$ un grupo no necesariamente abeliano con neutro e.

i) Para $a \in G$, se define la función $h_a : G \to G$ por $h_a(x) = a * x * a^{-1}$(a^{-1} es el inverso de a en G)
Pruebe que $\forall a \in G$, h_a es un isomorfismo de $(G, *)$ en $(G, *)$.
Es necesario probar que h_a es un homomorfismo y que es biyectiva

- h_a es homomorfismo: Por demostrar que $\forall x, y \in G$

$$h_a(x * y) = h_a(x) * h_a(y)$$

En efecto

$$\begin{aligned} h_a(x) * h_a(y) &= (a * x * a^{-1}) * (a * y * a^{-1}) \quad && \text{(asociando)} \\ &= (a * x) * (a^{-1} * a) * (y * a^{-1}) && (a^{-1} * a = e) \\ &= (a * x) * e * (y * a^{-1}) && \text{(asociando)} \\ &= a * (x * y) * a^{-1} \quad = h_a(x * y) \end{aligned}$$

- h_a es biyectiva: **(1.0 pto.)**
Inyectiva: Sea $h_a(x) = h_a(y) \Rightarrow a * x * a^{-1} = a * y * a^{-1}$.
a y a^{-1} son regulares o cancelables en $G \Rightarrow x = y$
Así, h_a es inyectiva. **(0.5 ptos.)**

Epiyectiva: $\forall y \in G \;\; \exists x \in G$ t.q. $h_a(x) = y$.
Sea $y \in G$, para $x \in G$ basta tomar $x = a^{-1} * y * a \in G$ con lo cual

$$\begin{aligned} h_a(x) &= a * (a^{-1} * y * a) * a^{-1} \quad && \text{(asociando)} \\ &= (a * a^{-1}) * y * (a * a^{-1}) && a * a^{-1} = e = a^{-1} * a \\ &= e * y * e = y \end{aligned}$$

Así $\exists x \in G$ t.q. $y = h_a(x)$ **(0.5 ptos.)**

ii) Se definen los conpuntos $A = \{f : G \to G / f$ es isomorf. de $(G, *)$ en $(G, *)\}$ y $B = \{g : G \to G / g$ es biyectiva$\}$.
Demuestre que $(A, \circ)$ es subgrupo de $(B, \circ)$ ($\circ$ es la composición de funciones).
Previo, $A \neq \phi$ pués, al menos, $f = id_A$ es un isomorf. de $(G, *)$ en $(G, *)$. **(0.2 ptos.)**
Además: $\forall f, g \in A, f, g$ biyectivas y , f, g son homomorfismos $\therefore$ $g \circ f$ es biyectiva y $g \circ f$ es un homomorfismo.
Así $g \circ f \in A$ **(0.4 ptos.)**
Tambien $f \in A \Rightarrow f$ es biyectiva y f es homomorfismo y por lo tanto f^{-1} es biyectiva y f^{-1} es homomorfismo $\Rightarrow f^{-1} \in A$.
Entonces $(A, \circ)$ es subgrupo de $(B, \circ)$. **(0.4 ptos.)**

OBS. El alumno puede invocar, sin tener que demostrar, propiedades vistas en clase y por lo tanto argumentar.

i) f, g isomorfismos y la composición de isomorfismos es isomorfismo $\Rightarrow g \circ f \in A$.

ii) f isomorfismo $\Rightarrow f^{-1}$ es isomorfismo.
Así $(A, \circ)$ subgrupo $(B, \circ)$.

iii) Pruebe que la función $\varphi : (G, *) \rightarrow (A, \circ)$
$$a \rightarrow \varphi(a) = h_a$$
es un homomorfismo, en donde A es el conjunto de los isomorfismos definido en (ii) y h_a es el isomorfismo del punto (i).
Por demostrar que $\forall a, b \in G \quad \varphi(a * b) = \varphi(a) \circ \varphi(b)$
En efecto:

$$\begin{aligned}
\varphi(a * b) &= h_{a*b} = (a * b) * x * (a * b)^{-1} \\
&= (a * b) * x * (b^{-1} * a^{-1}) \qquad \text{(asociando)} \\
&= a * (b * x * b^{-1}) * a^{-1} \\
&= h_a(b * x * b^{-1}) \qquad \text{(definición)} \\
&= h_a(h_b) \qquad \text{(definición)} \\
&= h_a \circ h_b \quad = \varphi(a) \circ \varphi(b)
\end{aligned}$$

(1.0 pto.)

Así $\varphi(a * b) = \varphi(a) \circ \varphi(b) \therefore h$ es un homomorfismo. **(1.0 pto.)**

iv) Un ejemplo puede ser, considerar el grupo trivial $(\{e\}, *)$ $\varphi(a) = \varphi(e) = h_e = e * x * e^{-1} = x$, pero $x \in \{e\} \Rightarrow x = e$.
Sigue que $\varphi = h_e = e = c^{\underline{te}}$.
También puede considerarse que $(G, *)$ sea abeliano, y en tal caso

$$\varphi(a) = h_a = a * x * a^{-1} = (a * a^{-1}) * x = e * x = x \quad \forall x \in G$$

Así $\varphi = id_G$.
Es decir $\forall a \in G \quad \varphi(a) = id_G =$ constante.

Problema 3   Parte (ii)

Es probable que muchos alumnos no reconozcan como vistas en clases las propiedades de los isomorfismos. En tal caso, a pesar de tener asignación de 1.0 pto., deberían argumentar como sigue.

$$A \neq \phi \text{ pués, al menos } f = id_A \in A$$

Sigue que:

1) Sean $f, g \in A$, es decir f, g son isomorfismos de $(g, *)$ en $(G, *)$.
   Por demostrar que $g \circ f$ es isomorfismo de $(G, *)$ en $(G, *)$.
   En efecto: g, f biyectivas $\Rightarrow g \circ f$ biyectiva.
   Además

$$\left.\begin{array}{l}(g \circ f)(x * y) = g(f(x * y)) = g(f(x) * f(y)) \\ = g(f(x)) * g(f(y)) = (g \circ f)(x) * (g \circ f)(y)\end{array}\right\} \text{Pués } g \text{ y } f \text{ son isomorfismos de } (G, *) \text{ en } (G, *)$$

   Entonces $g \circ f \in A$. **(0.5 ptos.)**

2) Sea $f \in A$, es decir f es biyectiva y f es homomorfismo.
   Entonces f^{-1} es también biyectiva y sea $f^{-1}(x * y) = u \Rightarrow x * y = f(u)$.
   Como $x, y \in G, \exists a, b \in G$ t.q. $x = f(a) \quad \wedge \quad y = f(b)$
   $\Rightarrow f^{-1}(x) = a \quad \wedge \quad f^{-1}(y) = b.$
   Sigue que $x * y = f(u) \Rightarrow f(a) * f(b) = f(u)$ y por el morfismo $f(a * b) = f(u) \overset{f \text{ inyectiva}}{\Rightarrow} a * b = u.$
   Entonces $f^{-1}(x) * f^{-1}(y) = u = f^{-1}(x * y) \quad \therefore f^{-1}$ es homomorfismo con lo cual $f^{-1} \in A$. **(0.5 ptos.)**