Pauta Control #3 MA11A Algebra
Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile
Semestre 2006-1

Pauta Problema 1

a) Demuestre, utilizando las propiedades de las raíces de la unidad que $\forall n \in \mathbb{N}\ n \geq 2$

$$\begin{array}{rll} & cos\frac{2\pi}{n} + cos\frac{4\pi}{n} + ... + cos\frac{2(n-1)\pi}{n} & = -1 \\ \text{y} & sen\frac{2\pi}{n} + sen\frac{4\pi}{n} + ... + sen\frac{2(n-1)\pi}{n} & = 0 \end{array}$$

En efecto, se sabe que la suma de las raíces ene-ésimas de la unidad, es cero, es decir
$\sum\limits_{k=0}^{n-1} W_k = 0$ en que $W_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}, k = 0, 1, 2, ..., n-1$
o bien $W_k = cos\frac{2k\pi}{n} + isen\frac{2k\pi}{n}, k = 0, 1, ..., n-1$
Así, $\sum\limits_{k=0}^{n-1} W_k = 0 \Rightarrow W_0 + \sum\limits_{k=1}^{n-1}(cos\frac{2k\pi}{n} + isen\frac{2k\pi}{n}) = 0$ con $W_0 = 1$

(1.0 pto.)

Entonces $\sum\limits_{k=1}^{n-1}(cos\frac{2k\pi}{n} + isen\frac{2k\pi}{n} = -1$
$\Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{n-1} cos\frac{2k\pi}{n} + i\sum\limits_{k=1}^{n-1} sen\frac{2k\pi}{n} = -1$ de donde identificando la parte real y la imaginaria
$\sum\limits_{k=1}^{n-1} cos\frac{kk\pi}{n} = cos\frac{2\pi}{n} + cos\frac{4\pi}{n} + ... + cos\frac{2(n-1)\pi}{n} = -1$ (Parte real)
y $\sum\limits_{k=1}^{n-1} sen\frac{2k\pi}{n} = sen\frac{2\pi}{n} + sen\frac{4\pi}{n} + ... + sen\frac{2(n-1)\pi}{n} = 0$ (Parte imaginaria)

(1.0 pto.)

b) i) Demuestre que $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
$z_1\overline{z}_2 + \overline{z}_1 z_2 = 2|z_1 z_2| cos\phi$, donde ϕ es el ángulo entre los complejos z_1 y z_2.
Los complejos en forma polar (o exponencial) pueden escribirse como:

$$\begin{array}{lll} z_1 & = \rho_1 e^{i\varphi_1} & = \rho_1(cos\varphi_1 + isen\varphi_1) \\ z_2 & = \rho_2 e^{i\varphi_2} & = \rho_2(cos\varphi_2 + isen\varphi_2) \\ \overline{z}_1 & = e^{-i\varphi_1} & = \rho_1(cos\varphi_1 - isen\varphi_1) \\ \overline{z}_a & = e^{-i\varphi_2} & = \rho_2(cos\varphi_2 - isen\varphi_2) \end{array}$$

en donde $\rho_1 = |z_1| = |\overline{z}_1|; \rho_2 = |z_2| = |\overline{z}_2|$ y $\varphi_1 = Arg(z_1), \varphi_2 = Arg(z_2)$
Reemplazando queda:

$$\begin{array}{ll} z_1\overline{z}_2 + \overline{z}_1 z_2 & = \rho_1 e^{i\varphi_1}\rho_2 e^{-i\varphi_2} + \rho_i e^{-i\varphi_1}\rho_2 e^{i\varphi_2} \\ & = \rho_1\rho_2 e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} + \rho_1\rho_2 e^{-i(\varphi_1-\varphi_2)} \end{array}$$

(1.0 pto.)

y en polares

$$\begin{array}{ll} = & \rho_1\rho_2[cos(\varphi_1 - \varphi_2) + isen(\varphi_1 - \varphi_2) + cos[-(\varphi_1 - \varphi_2)] + isen[-(\varphi_1 - \varphi_2)]] \\ = & \rho_1\rho_2[2cos(\varphi_1 - \varphi_2) + isen(\varphi_1 - \varphi_2) - isen(\varphi_1 - \varphi_2)] \\ = & 2\rho_1\rho_2 cos(\varphi_1 - \varphi_2) = 2|z_1||z_2|cos(\varphi_1 - \varphi_2) \end{array}$$

Así $2|z_1||z_2|cos(\varphi_1 - \varphi_2) = 2|z_1 z_2|cos\phi$ de donde $cos(\varphi_1 - \varphi_2) = cos\phi$, es decir $\phi = \varphi_1 - \varphi_2 =$ ángulo entre z_1 y z_2. (1.0 pto.)

ii) Sean s, u, v complejos que satisfacen la relación $s = u - v$ y ϕ es el ángulo entre los complejos u y v. Demuestre que $|s|^2 = |u|^2 + |v|^2 - 2|u||v|cos\phi$.

Indicación: Puede usar (i) y recuerde que $|z|^2 = z\overline{z}, \forall z \in \mathbb{C}$. De la relación $s = u - v$), tomando módulo y $()^2$ $|s|^2 = |u - v|^2 = (u - v)(\overline{u - v})$ según indicación así, $|s|^2 = (u - v)(\overline{u} - \overline{v}) = u\overline{u} + v\overline{v} - u\overline{v} - \overline{u}v$

(1.0 pto.)

en donde $u\overline{u} = |u|^2, v\overline{v} = |v|^2$ y usando b) i) $u\overline{v} + \overline{u}v = 2|uv|cos\phi$ donde ϕ es el ángulo entre u y v

Así, $|s|^2 = |u|^2 + |v|^2 - 2|uv|cos\phi$ o bién $|s|^2 = |u|^2 + |v|^2 - 2|u||v|cos\phi$

(1.0 pto.)

Pauta Problema 2

Sean $(G,*)$ y (H,o) grupos con neutros e_G y e_H respectivamente. Se define en $G \times H$ la ley de composición interna $\triangle$ por:

$$(a,b)\triangle(c,d) = (a*c, bod)\forall(a,b)(c,d) \in G \times H$$

i) Demuestre que $(G \times H, \triangle)$ es grupo

Cerradura: $(G,*)$ y (H,o) son grupos, entonces $a*c \in G$ y $bod \in H$ es decir $(a*c, bod) \in G \times H \quad \forall(a,b),(c,d) \in G \times H$ de donde $G \times H$ es cerrado para $\triangle$.

Asociatividad: $*$ y o asocian en G y H respectivamente entonces

$$[(a,b)\triangle(c,d)]\triangle(f,g) = (a*c, bod)\triangle(f,g) = [(a*c)*f, (bod)og]$$
$$= [a*c*f), bo(dog)] = (a,b)\triangle(c*f, dog) = (a,b)\triangle(c,d)\triangle(f,g))$$

es decir $\triangle$ es asociativa en $G \times H$. (1.0 pto.)

Neutro en $G \times H$: c_G es neutro en G y e_H neutro en H. Es inmediato que (e_G, e_H) es neutro en $G \times H$, en efecto:

$$(e_G, e_H)\triangle(a,b) = (e_G * a, e_H ob) = (a,b)$$
$$\text{y } (a,b)\triangle(e_G, e_H) = (a * e_G, boe_H) = (a,b).$$

Inversos: Dado $(a,b) \in G \times H$ y a^{-1} inverso de a en G y b' inverso de b en H, el inverso de (a,b) en $G \times H$ será (a^{-1}, b'). En efecto

$$(a,b)\triangle(a^{-1}, b') = (a*a^{-1}, bob') = (e_G, e_H)\text{analogamente}$$
$$(a^{-1}, b')\triangle(a,b) = (a^{-1}*a, b'ob) = e_G, e_H).$$

Así, $(G \times H, \triangle)$ es grupo. (1.0 pto.)

ii) Demuestre que las funciones φ y ψ definidas por:

$$\begin{array}{lcl} \varphi : G \times H \to G & \text{y} & \psi : G \times H \to H \\ (g,h) \to \varphi((g,h)) = g & & (g,h) \to \psi((g,h)) = h \end{array}$$

son homomorfismos sobreyectivos.

En efecto φ es sobreyectiva pués $\forall g \in G$, bastará tomar cualquier $(g,h) \in G \times H$, por ejemplo $(g, e_H) \in G \times H$ y $\varphi((g, e_H)) = g$. Además

$$\varphi[(g_1,h_1)\triangle(g_2,h_2)] = \varphi(g_1 * g_2, h_1 o h_2) = g_1 * g_2$$
$$= \varphi(g_1,h_1) * \varphi(g_2,h_2)$$

es decir φ es homomorfismo de $(G \times H, \triangle)$ en $(G,*)$ (1.0 pto.)

iii) Considere $G = H; * = o$ y la función $f : G \times G \to G$ definida por $f((a,b)) = (a*b)^{-1}\ \forall(a,b) \in G \times G$. Pruebe que: f es un homomorfismo de $(G \times G, \triangle)$ en $(G,*) \Leftrightarrow (G,*)$ es abeliano

$(\Rightarrow)$ Se puede considerar $(a,e),(e,d) \in G \times G$ con e neutro en G y f homomorfismo de $(G \times G, \triangle)$ en $(G,*)$. Entonces $f[(a,e)\triangle(e,d)] = f((a,e)) * f((e,d))$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow & f(a*e, e*d) = (a*e)^{-1} * (e*d)^{-1} \Rightarrow f((a,d)) = a^{-1} * d^{-1} \\ \Rightarrow & (a*d)^{-1} = a^{-1} * d^{-1} \Rightarrow (a*d)^{-1} * /(d*A)^{-1} \\ \Rightarrow & a*d = d*a\ \forall a,d \in G\text{por lo tanto}(G,*) \end{array}$$

es Abeliano (1.0 pto.)

($\Leftarrow$) Sea $(G,*)$ grupo Abeliano. Entonces

$$\begin{aligned} f[(a,b)\triangle(c,d)] &= f[(a*c,b*d)] = [(a*c)*(b*d)]^{-1} \\ &= (b*d)^{-1}*(a*c)^{-1} = (d^{-1}*b^{-1})*(c^{-1}*a^{-1}) \text{ y asociando y conmutando} \\ &= (b^{-1}*a^{-1})*(d^{-1}*c^{-1}) = (a*b)^{-1}*(c*d)^{-1} = f[(a,b)]*f[(c,d)] \end{aligned}$$

es decir f es homomorfismo de $(G\times G, A)$ en $(G,*)$ (1.0 pto.)

Pauta Problema 3

Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo (no necesariamente con unidad). Para $n \in \mathbb{Z}$ y $Q \in A$ se define

$$na = \underbrace{a + a + ... + a}_{n \text{ veces}} \text{ si } n > 0; \ 0a = 0_A \in A \ \text{ si } n = 0$$
$$\text{y} \quad na = \underbrace{(-a) + (-a) + ... + (-a)}_{-n \text{ veces}} \ \text{ si } n < 0$$

Además, puede usar, sin demostrar que:

$$(\forall m, n \in \mathbb{Z})(\forall a, b \in A)(n + m)a = na + ma$$
$$n(ma) = nma; a(nb) = nab$$

Considere en $(\mathbb{Z} \times A)$ las leyes suma y producto definidas por

Suma: $(n, a) \oplus (m, b) = (n + m, a + b)$

Producto: $(n, a) \odot (m, b) = (n, m, nb + ma + ab)$

i) Demuestre que $(\mathbb{Z}\times, \oplus, \odot)$ es un anillo con unidad. En efecto $(\mathbb{Z} \times \oplus)$ es grupo Abeliano pués

$\oplus$ es cerrada en $\mathbb{Z} \times A$ pués $(n + m, a + b) \in \mathbb{Z} \times A$.

$\oplus$ es asociativa y conmutativa puesto que $+$ en $\mathbb{Z}$ y $+$ en A asocian y conmutan en esos anillos.

Neutro para $\oplus$: $(0, 0_A) \in \mathbb{Z} \times A$ pués

$$(n, a) \oplus (0, 0_A) = (n + 0, a + 0_A) = (n, a) = (0, 0_A) \oplus (n, a)$$

Simétricos: $\forall (n, a) \in \mathbb{Z} \times A$ existe $(-n, -a) \in \mathbb{Z} \times A$ tal que

$$(n, a) \oplus (-n, -a) = (n - n, a(-a)) = (0, 0_A)$$

por lo tanto $(\mathbb{Z} \times A, \oplus)$ es grupo Abeliano. (1.0 pto.)

$\odot$ es asociativa. Por demostrar que $\forall (n_1, a_1), (n_2, a_2), (n_3, a_3) \in \mathbb{Z} \times A$ se cumple

$$(n_1, a_1) \odot [(n_2, a_2) \odot (n_3, a_3)] = [(n_a, a_1)) \odot (n_2, a_2)] \odot (n_3, a_3)$$

En efecto $(n_1, a_1) \odot [(n_2, a_2) \odot (n_3, a_3)] = (n_1, a_1) \odot (n_2n_3, n_2a_3 + n_3a_2 + a_2a_3) = (n_1n_2n_3, n_1n_2a_3 + n_1n_3a_2 + n_1a_2a_3 + n_2n_3a_1 + n_2a_1a_3 + n_3a_1a_2 + a_1a_2a_3)$ y $[(n_1, a_1) \odot (n_2, a_2)] \odot (n_3, a_3) = (n_1n_2, n_1a_2 + n_2a_1 + a_1a_2) \odot (n_3, a_3) = (n_1n_2n_3, n_1n_2a_3 + n_3n_1a_2 + n_3n_2a_1 + n_3a_1a_2 + n_1a_2a_3 + n_2a_1a_3 + a_1a_2a_3)$ y estos desarrollos son iguales si se consideran la asociatividad y propiedades de la definición en el anillo $(A, +, \cdot)$ (0.5 ptos.)

Distributividad

$$(n_1, a_1) \odot [(n_2, a_2) \oplus (n_3, a_3)] = (n_1, a_1) \odot (n_2, a_2) \oplus (n_1, a_1) \odot (n_3, a_3)$$

En efecto

$$(n_1, a_1) \odot [(n_2, a_2) \oplus (n_3, a_3)] = (n_1, a_1) \odot (n_2 + a_3, a_2 + a_3)$$
$$= (n_1n_2 + n_3), n_1a_2 + n_1a_3 + n_2a_1 + n_3a_1 + a_1a_2 + a_1a_3)$$

y

$$(n_1, a_1) \odot (n_2, a_2) \oplus (n_1, a_1) \odot (n_3, a_3) = (n_1n_2, n_1a_2 + n_2a_1 + a_1a_2)$$
$$\oplus (n_1a_3 + n_1a_3 + n_3a_1 + a_1a_3)$$
$$= (n_1(n_2 + n_3), n_1a_2 + n_2a_1 + n_1a_3 + n_3a_1 + a_1a_2 + a_1a_3)$$

y los desarrollos son iguales usando las propiedades de $(A,+,\cdot)$ por lo tanto $(\mathbb{Z}\times A,\oplus,\odot)$ es un anillo. (0.5 ptos.)

Unidad: $(n,u)\in\mathbb{Z}\times A$ es unidad de $(\mathbb{Z}\times A,\oplus,\odot)$ si $\forall(m,b)\in\mathbb{Z}\times A$

$$(n,u)\odot(m,b)=(m,b)\odot(n,u)=(m,b)$$

Entonces

$$(nm, nb+mu+ub)=(m,b)\Rightarrow=\begin{cases} n\cdot m & =m \\ nb+mu+ub & =b\end{cases}$$
$$\Rightarrow n=1\in\mathbb{Z} \text{ y } 1\cdot b+mu+ub=b\Rightarrow mu+ub=0_A$$

y esto último se cumple solo si $u=0_A(m\cdot 0_A+0_Ab=0_A)$. Así $(1,0_A)\in\mathbb{Z}\times A$ es unidad de $(\mathbb{Z}\times A,\oplus,\odot)$ (1.0 pto.)

ii) Demuestre que las funciones

$$\begin{array}{rlcrl} f: & A\to\mathbb{Z}\times A & \text{y} & g: & \mathbb{Z}\to\mathbb{Z}\times A \\ & a\to f(a)=(0,a) & & & n\to g(n)=(n,0_A)\end{array}$$

son homomorfismos inyectivos de los anillos $(A,+,\cdot)$ y $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ en el anillo $(\mathbb{Z}\times A,\oplus,\odot)$ respectivamente.

En efecto: f inyectiva $f(a)=f(b)\Rightarrow(0,a)=(0,b)\Rightarrow a=b$.

Morfismos:

$$\begin{array}{rr} \text{Para } \oplus & f(a)\oplus f(b)=(0,a)\oplus(0,b)=(0,a+b)=f(a+b) \\ \text{Para } \odot & f(a)\odot f(b)=(0,a)\odot(0,b)=(0,0b+0a+ab) \\ & =(0,ab)=f(ab)\end{array}$$

(0.8 ptos.)

g inyectiva $g(n_1)=g(n_2)\Rightarrow(n_1,0_A)=(n_2,0_A)\Rightarrow n_1=n_2$

Morfismos:

$$\begin{array}{rr} \text{Para } \oplus & g(n_1)\oplus g(n_2)=(n_1,0_A)\oplus(n_2,0_A)=(n_1+n_2,0_A)=g(n_1+n_2) \\ \text{Para } \odot & g(n_1)\odot g(n_2)=(n_1,0_A)\odot(n_2,0_A)=(n_1n_2,n_10_A+n_20_A+0_A0_A) \\ & =(n_1n_2,0_A)=g(n_1n_2)\end{array}$$

(0.7 ptos.)

iii) Considere en lugar de $(A,+,\cdot)$ el cuerpo $(\mathbb{Z}_5,+,\cdot)$ Muestre que el anillo $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_5,\oplus,\odot)$ tiene divisores del cero

Es $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_5,\oplus,\odot)$ un cuerpo?

Bastará tomar, por ejemplo $(0,[a]_5)$ y $(n,[b]_5)$ en $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_5$ y plantear $(0,[a]_5)\odot(n,[b]_5)=(0,[0]_5)=$ cero en $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_5$. Entonces $(0\cdot n, 0\cdot[b]_5+n[a]_5+[0]_5[b]_5)\Rightarrow(0,n[a]_5+[ab]_5)=(0,[0]_5)$.

De esto, si tomamos, $n=1,[a]=[1]$ y $[b]=[4]$ se tiene:

$$n[a]_5+[ab]_5=1[1]_5+[4]_5=[5]_5=[0]_5\Rightarrow(0,[1]_5)\odot(1,[4]_5)=(0,[0]_5)$$

Así, $(0,[1]_5)\neq(0,[0]_5)$ y $(1,[4]_5)\neq(0,[0]_5)$ son divisores del cero de $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_5,\oplus,\odot)$ (1.2 ptos.)

$(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_5,\oplus,\odot)$ no puede ser cuerpo porque tiene divisores del cero. (0.3 ptos.)