MA-11A Álgebra **17 de Agosto, 2000**

Pauta Control No. 4

PROBLEMA 1:

(i).- Hay dos formas de abordar el problema.

- **Primera Forma:** Utilizando matrices elementales, partiendo de A,

$$\text{Premultiplicando por } E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ se obtiene } \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 7 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\text{Premultiplicando por } E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ se obtiene } \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 6 & -2 \end{pmatrix},$$

$$\text{Premultiplicando por } E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \text{ se obtiene } \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sigue que $U = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y que

$$L = (E_3E_2E_1)^{-1} = E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

i.e., $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

- **Segunda Forma:** Partiendo de la matriz aumentada $(A|I_3)$, i.e.,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 7 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

Sigue que $U = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y que $L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 7 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Invirtiendo L^{-1} se obtiene que $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

(ii.1).- Basta notar que $(I_n - P)^2 = I_n - 2P + P^2 = I_n - P$, donde la última igualdad se cumple dado que $P^2 = P$.

(ii.2).- Si P es matriz de proyección, entonces

$$P^2(I_n - P) \;=\; P(I_n - P) \;=\; P - P^2 \;=\; 0\,.$$

Además,

$$P(I_n - P)^2 \;=\; P(I_n - 2P + P^2) \;=\; P(I_n - P) \;=\; P - P^2 = 0\,.$$

Para probar el converso, observar que como $P^2(I_n - P) = 0$, entonces $P^3 = P^2$. Como $P(I_n - P)^2 = 0$, entonces $P = 2P^2 - P^3$. Luego, $P = 2P^2 - P^2 = P^2$, i.e., P es matriz de proyección.

(ii.3).- Hay muchas posibles respuestas, un ejemplo es $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Problema 2:

(i).- Escalonando la matriz aumentada asociada al sistema se obtiene:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -\alpha & 0 & 1 & 2 & 1 \\ \alpha & -1 & 1 & -2 & -1 \\ -\alpha & -2 & 1 & 3 & 2 \\ -\alpha & -4 & \beta{+}1 & 4 & \alpha{+}\beta{+}3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -\alpha & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & \beta & 2 & \alpha{+}\beta{+}2 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -\alpha & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \beta{-}8 & 2 & \alpha{+}\beta{+}2 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -\alpha & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \beta/4 & \alpha + 5\beta/4 \end{array}\right)$$

Si $\alpha \neq 0$ y $\beta = 0$ el sistema no tiene solución.

Si $\alpha \neq 0$ y $\beta \neq 0$ hay un pivote por columna, luego el sistema tiene solución única.

Si $\alpha = 0$ hay que seguir pivoteando y se obtiene:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \beta/4 & 5\beta/4 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \beta/4 & 5\beta/4 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \beta/4 & 5\beta/4 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10\beta/9 \end{array}\right)$$

Luego, si $\alpha = 0$ y $\beta = 0$ el sistema tiene infinitas soluciones.

Si $\alpha = 0$ y $\beta \neq 0$, el sistema no tiene soluciones.

En resumen:

- El sistema tiene solución única si $\alpha \neq 0$ y $\beta \neq 0$.
- El sistema tiene infinitas soluciones si $\alpha = 0$ y $\beta = 0$.
- El sistema no tiene soluciones si $\alpha \neq 0$ y $\beta = 0$, o cuando $\alpha = 0$ y $\beta \neq 0$.

(ii).- Se pide invertir la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

El mismo proceso de escalonamiento hecho en la parte anterior lleva a que partiendo de la matriz aumentada $(A|I_4)$ se llegue a:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & -1/2 & -7/4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 & 3/4 & 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -7 & 4 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -4 & -14 & 8 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -7 & 4 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -4 & -16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -7 & 4 \end{array}\right).$$

Luego, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -16 & 9 \\ 1 & -1 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -7 & 4 \end{pmatrix}$.

Sigue que la solución del sistema es $\begin{pmatrix} 2 & -4 & -16 & 9 \\ 1 & -1 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -7 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 4 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}$.

PROBLEMA 3:

(i).- Como $U^T U = I_n$ sigue que U es invertible y su inversa es $U^{-1} = U^T$. Luego, $(U^T)^T U^T = UU^T = I_n$, i.e., $U^{-1} = U^T$ es unitaria.

Además, como U_1 y U_2 son unitarias, se tiene que $U_1^T U_1 = I_n$ y $U_2^T U_2 = I_n$. Luego, $(U_1 U_2)^T (U_1 U_2) = U_2^T (U_1^T U_1) U_2 = U_2^T U_2 = I_n$, i.e., $U_1 U_2$ es unitaria.

(ii).- Observar que $H^T = (I_n)^T - 2(uu^T)^T = I_n - 2uu^T = H$. Luego,

$$H^T H = (I_n - 2uu^T)^2 = I_n - 4uu^T + 4uu^T uu^T .$$

Pero, $u^T u = 1$, por lo que $uu^T uu^T = uu^T$. Sigue que $H^T H = I_n$.

(iii).- Para comprobar que $G(\theta)$ es unitaria basta verificar que

$$G(\theta)^T G(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & 0 \\ 0 & \sin^2\theta + \cos^2\theta \end{pmatrix},$$

que es igual a I_2.

Por otro lado, si $A = (a_{i,j})_{i,j\in\{1,2\}}$, entonces la componente $(2,1)$ de $G(\theta)A$ es

$$a_{1,1}\sin\theta + a_{2,1}\cos\theta .$$

Para que este valor sea 0 hay que elegir $\cos\theta = 0$ si $a_{1,1} = 0$ y $\tan\theta = -a_{2,1}/a_{1,1}$ en caso contrario, i.e., $\theta = \pi/2$ si $a_{1,1} = 0$ y $\theta = \arctan(-a_{2,1}/a_{1,1})$ si $a_{1,1} \neq 0$.

(iv).- Como U es unitaria, es invertible. Como U es triangular superior su inversa U^{-1} es triangular superior. Pero, por definición de matriz unitaria, $U^{-1} = U^T$, i.e., U^{-1} es triangular inferior. Como U^{-1} es triangular inferior y superior, debe ser diagonal, y su inversa, U, también será diagonal. Luego, si

$$U = \begin{pmatrix} u_1 & & & \\ & u_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & u_n \end{pmatrix},$$

entonces de la identidad $U^T U = I_n$ se deduce que $u_i^2 = 1$, i.e., $u_i = 1$ o $u_i = -1$ cualquiera sea $i \in \{1, \dots n\}$.