MA-11A Álgebra **23 de Agosto, 2001**

Pauta Control 4

PROBLEMA 1:

(i).- Hay dos formas de abordar el problema.

- **Primera Forma:** Utilizando matrices elementales, partiendo de A,

$$\text{Premultiplicando por } E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ se obtiene } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\text{Premultiplicando por } E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ se obtiene } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\text{Premultiplicando por } E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ se obtiene } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sigue que $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y que

$$L = (E_3E_2E_1)^{-1} = E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

i.e., $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- **Segunda Forma:** Partiendo de la matriz aumentada $(A|I_4)$, i.e.,

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Sigue que $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y que $L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Invirtiendo L^{-1} se obtiene que $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(ii.1).- Veamos que $Je = ne$. En efecto, si $J_{k,l}$ denota la componente (k,l) de J, la k-ésima componente de Je es:

$$\sum_{l=1}^{n} J_{k,l} e_l = \sum_{l=1}^{n} 1 = n\,.$$

Luego, observando que la k-ésima componente de ne es n, concluimos que $Je = ne$.

Veamos ahora que $J^2 = J$. Usaremos la misma notación utilizada más arriba. Estableceremos el resultado de dos maneras distintas.

- **Primera Forma**: Observar que la componente (k,l) de J^2, por definición del producto de matrices, es
$$\sum_{t=1}^{n} J_{k,t} J_{t,l} = \sum_{t=1}^{n} 1 = n\,.$$
Como la (k,l)-ésima componente de nJ es n, concluimos que $J^2 = nJ$.

- **Segunda Forma**: Sabiendo que $Je = ne$ y observando que $J = (e \dots e)$, sigue que
$$J^2 = J(e \dots e) = (Je \dots Je) = (ne \dots ne) = n(e \dots e) = nJ\,.$$

(ii.2).- Suponiendo que tal β exista, se tendrá que

$$I = (I - \alpha J)(I + \beta J) = I + (\beta - \alpha)J - \alpha\beta J^2 = I + (\beta - \alpha)J - n\alpha\beta J\,,$$

donde la última igualdad se tiene por (i). Despejando, obtenemos que

$$(\beta - \alpha)J = n\alpha\beta J\,.$$

Igualando una componente cualquiera de la anterior igualdad matricial, obtenemos que $(\beta - \alpha) = n\alpha\beta$. Despejando por β, concluimos que $\beta = \alpha/(1 - n\alpha)$.

Para el valor de β establecido, es fácil comprobar que $(I - \alpha J)(I + \beta J) = I$. Por lo tanto,

$$(I - \alpha J)^{-1} = I + \frac{\alpha}{1 - n\alpha} J\,.$$

(ii.3).- Si $\alpha = 1/n$, entonces por (i), $(I - \alpha J)e = e - n\alpha e = (1 - n\alpha)e = 0e = 0$. Luego, el sistema homogéneo $(I - \alpha J)x = 0$ tiene solución no trivial, por lo que $I - \alpha J$ no es invertible.

PROBLEMA 2:

(i).- Escalonando la matriz aumentada asociada al sistema se obtiene:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & & -\alpha & & 2 \\ 4 & -2 & -2 & 2\alpha & 2+\alpha \\ -1 & & \alpha & \alpha+1 & 2\beta+\alpha-2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & & -\alpha & & 2 \\ & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & -2 & 2\alpha & 2+\alpha \\ -1 & & \alpha & \alpha+1 & 2\beta+\alpha-2 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & & -\alpha & & 2 \\ & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & -2 & -2+2\alpha & 2\alpha & -2+\alpha \\ & & \frac{1}{2}\alpha & \alpha+1 & 2\beta+\alpha-1 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & & -\alpha & & 2 \\ & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & & 2\alpha & 2+2\alpha & \alpha \\ & & \frac{1}{2}\alpha & \alpha+1 & 2\beta+\alpha-1 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & & -\alpha & & 2 \\ & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & & 2\alpha & 2+2\alpha & \alpha \\ & & & \frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2} & 2\beta+\frac{3}{4}\alpha-1 \end{array}\right)$$

Si $\alpha \neq 0$ y $\alpha \neq -1$ hay un pivote por columna, luego el sistema tiene solución única.

Si $\alpha = -1$ y $2\beta - 7/4 \neq 0$, i.e., $\beta \neq 7/8$, el sistema no tiene solución. Si $\alpha = -1$ y $\beta = 7/8$, entonces el sistema tiene solución y hay una variable libre, luego hay infinitas soluciones.

Si $\alpha = 0$ hay que seguir pivoteando y se obtiene:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & & & & 2 \\ & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & & & 2 & \\ & & & \frac{1}{2} & 2\beta-1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & & & & 2 \\ & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & & & 2 & \\ & & & & 2\beta-1 \end{array}\right)$$

Luego, si $\alpha = 0$ y $2\beta - 1 \neq 0$, i.e., $\beta \neq 1/2$ el sistema no tiene solución. Si $\alpha = 0$ y $\beta = 1/2$, el sistema tiene solución y hay una variable libre, luego hay infinitas soluciones.

En resumen:

- El sistema tiene solución única si $\alpha \notin \{0, -1\}$.
- El sistema tiene infinitas soluciones cuando $\alpha = -1$ y $\beta = 7/8$ o cuando $\alpha = 0$ y $\beta = 1/2$.
- El sistema no tiene soluciones cuando $\alpha = -1$ y $\beta \neq 7/8$ o cuando $\alpha = 0$ y $\beta \neq 1/2$.

(ii).- Se pide invertir la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

El mismo proceso de escalonamiento hecho en la parte anterior lleva a que partiendo de la matriz aumentada $(A|I_4)$ se llegue a:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & & -1 & & & 1 & & \\ & 1 & 1 & 1 & 1 & & & \\ & & 2 & 4 & 2 & -2 & 1 & \\ & & & 1 & -1/2 & 1 & -1/4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & & -1/2 & & & 1/2 & & \\ & 1 & 1 & 1 & 1 & & & \\ & & 1 & 2 & 1 & -1 & 1/2 & \\ & & & 1 & -1/2 & 1 & -1/4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & & -1/2 & & & 1/2 & & \\ & 1 & 1 & & 3/2 & -1 & 1/4 & -1 \\ & & 1 & & 2 & -3 & 1 & -2 \\ & & & 1 & -1/2 & 1 & -1/4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & & & & 1 & -1 & 1/2 & -1 \\ & 1 & & & -1/2 & 2 & -3/4 & 1 \\ & & 1 & & 2 & -3 & 1 & -2 \\ & & & 1 & -1/2 & 1 & -1/4 & 1 \end{array}\right).$$

Luego, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1/2 & -1 \\ -1/2 & 2 & -3/4 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & -2 \\ -1/2 & 1 & -1/4 & 1 \end{pmatrix}$.

PROBLEMA 3:

(i).- Sea $M = (m_{i,j})_{i,j}$. Observar que $DM = (a_{i,j})_{i,j}$ tal que $a_{i,j} = d_i m_{i,j}$. Además, $MD = (b_{i,j})_{i,j}$ tal que $b_{i,j} = m_{i,j} d_j$. Luego, $MD = DM$ implica que $d_i m_{i,j} = m_{i,j} d_j$ cualquiera sea $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Sigue que

$$m_{i,j}(d_i - d_j) \quad = \quad 0\,. \tag{1}$$

Si $i \neq j$, como $d_i \neq d_j$, tenemos que $d_i - d_j \neq 0$. Despejando en (1), obtenemos que $m_{i,j} = 0$ si $i \neq j$, es decir M es matriz diagonal.

(ii).- Como el producto de matrices diagonales es conmutativo y dado que tanto $S^{-1}AS$ y $S^{-1}BS$ son diagonales,

$$(S^{-1}AS)(S^{-1}BS) = (S^{-1}BS)(S^{-1}AS)\,.$$

Pero $(S^{-1}AS)(S^{-1}BS) = S^{-1}ABS$ y $(S^{-1}BS)(S^{-1}AS) = S^{-1}BAS$. Luego, $S^{-1}ABS = S^{-1}BAS$.

Premultiplicando por S y postmultiplicando por S^{-1}, concluimos que $AB = BA$.

(iii).- Como $AB = BA$ tenemos que

$$(S^{-1}AS)(S^{-1}BS) = S^{-1}ABS = S^{-1}BAS = (S^{-1}BS)(S^{-1}AS)\,,$$

i.e., $S^{-1}AS$ conmuta con $S^{-1}BS$. Como $S^{-1}AS = D$, tomando $M = S^{-1}BS$ en (i), se concluye que $S^{-1}BS$ es diagonal.