Fecha: 12 de septiembre del 2002
Tiempo: 3 horas

Pauta Control 4 MA-11A Álgebra

1. (a) Procedemos a escalonar la matriz A.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{bmatrix}$$

Si $a = b$ se tendrían infinitas soluciones pues al escalonar aparecerían peldaños de largo mayor o igual a dos. Luego, $a \neq b$.

[0/1.5 ptos]

Podemos continuar escalonando usando como pivote el término $b - a$. Sigue que:

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & 0 & (c^2-a^2)-(c-a)(b+a) \end{bmatrix}$$

Para que el sistema tenga una única solución se tiene que tener:

$$(c-a)[(c+a)-(b+a)] = (c-a)(c-b) \neq 0$$

Se concluye que $(a \neq c) \wedge (b \neq c)$.

[0/1.5 ptos]

(b) Escalonemos la matriz asociada al sistema.

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \alpha & \beta \\ \alpha & \beta & 0 & 0 \\ \beta & \beta & \alpha & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \alpha & \beta \\ 0 & \beta & \alpha^2 & \alpha\beta \\ 0 & \beta & \alpha+\alpha\beta & \beta^2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \alpha^2-\alpha\beta & \alpha\beta-\beta^2 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \end{bmatrix}$$

Si $\alpha = 0$ se tendrían infinitas soluciones ya que la última fila quedaría con puros ceros. Es decir, la primera condición es $\alpha \neq 0$.

[0/1.5 ptos]

Ahora, después de permutar las últimas dos filas, seguimos escalonando usando a α como pivote.

$$\rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha\beta - \beta^2 \end{bmatrix}$$

Para que la solución al sistema sea única, se requiere que $\alpha\beta - \beta^2 = \beta(\alpha - \beta) \neq 0$. Es decir: $\beta \neq 0$ y $\alpha \neq \beta$. A estas dos condiciones hay que agregarle la primera: $\alpha \neq 0$.

[0/1.5 ptos]

2. (a)

$$\begin{aligned} ||x - P|| = ||x - Q|| &\iff \quad < x - P, x - P > = < x - Q, x - Q > \\ &\iff \quad < P, P > -2 < x, P > = < Q, Q > -2 < x, Q > \\ &\iff \quad < x, 2P - 2Q > = ||P||^2 - ||Q||^2 \end{aligned}$$

Esta última corresponde a la ecuación de un plano con normal $2P - 2Q$.

[0/1.5 ptos]

Debemos encontrar un $x_0 \in \mathbb{R}^3$ tal que $x_0 \in \mathcal{A}$. O sea:

$$< x_0, 2P - 2Q > = < P, P > - < Q, Q >$$

Basta con $x_0 = \frac{P+Q}{2}$. En efecto:

$$< \frac{P+Q}{2}, 2P - 2Q > = < P + Q, P - Q > = < P, P > - < Q, Q >$$

[0/1.5 ptos]

(b) i. Queremos encontrar t, s que satisfagan:

$$\begin{bmatrix} t \\ 5 - 3t \\ 1 + 2t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 2s \\ 2 + 4s \\ 3 + s \end{bmatrix}$$

En términos matriciales el sistema es:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ -3 & -4 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

Escalonando resulta:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

De donde se tiene que $s = 0$ y $t = 1$.
El punto de intersección es:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

`[0/1 pto]`

ii. Un vector director de la recta L es

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Luego, una ecuación vectorial de L es:

$$L : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -11 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R}$$

`[0/0.5 ptos]`

Para llevarla a la forma cartesiana se tiene:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 - 11t \\ x_2 &= 1 + 3t \\ x_3 &= 1 + 10t \end{aligned}$$

Expresando t en función de x_1, se tiene que:

$$\begin{aligned} x_2 &= 1 + 3(\tfrac{1-x_1}{11}) \\ x_3 &= 1 + 10(\tfrac{1-x_1}{11}) \end{aligned}$$

Se concluye que dos ecuaciones cartesianas que describen L son:

$$\begin{aligned} x_2 &= -\tfrac{3}{11}x_1 + \tfrac{14}{11} \\ x_3 &= -\tfrac{10}{11}x_1 + \tfrac{21}{11} \end{aligned}$$

`[0/0.5 ptos]`

iii. El plano π que contiene a las rectas L_1 y L_2 y que pasa por el punto en que éstas se intersectan es:

$$\pi : \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Por la parte (i) sabemos que un vector unitario normal al plano es:

$$\frac{1}{\sqrt{230}} \begin{pmatrix} -11 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Sigue que los dos planos π_1, π_2 que se buscan son:

$$\pi_1 : \frac{1}{\sqrt{230}} \begin{pmatrix} -11 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\pi_2 : -\frac{1}{\sqrt{230}} \begin{pmatrix} -11 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

`[0/1 pto]`

3. (a) Basta con demostrar que $(A^{-1}+B)A(A+B^{-1})^{-1}B^{-1} = I$. En efecto:

$$\begin{aligned} (A^{-1}+B)A(A+B^{-1})^{-1}B^{-1} &= A^{-1}A(A+B^{-1})^{-1}B^{-1} + BA(A+B^{-1})^{-1}B^{-1} \\ &= (A+B^{-1})^{-1}B^{-1} + BA(A+B^{-1})^{-1}B^{-1} \\ &= (I+BA)(A+B^{-1})^{-1}B^{-1} \\ &= (I+BA)[B(A+B^{-1})]^{-1} \\ &= (I+BA)(BA+I)^{-1} \\ &= I \end{aligned}$$

`[0/2 ptos]`

(b) Sea A una matriz cualquiera. El efecto de postmultiplicar por la matriz N (es decir calcular AN) puede describirse de la siguiente forma: "reemplace la primera columna de A por un vector de puros ceros y, para todo $i \in \{2, \ldots, n\}$, reemplace la columna i-ésima de A por la columna $(i-1)$-ésima de A".

Así, al repetir n veces la operación sobre I se tiene:

$$IN = N = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$N^{n-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$N^n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

`[0/2 ptos]`

(c) Basta con demostrar que $(I+N)(\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i N^i) = I$. En efecto:

$$\begin{aligned}
(I+N)(\textstyle\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i N^i) &= \textstyle\sum_{i=0}^{n-1}((-1)^i N^i + (-1)^i N^{i+1} \\
&= \textstyle\sum_{i=0}^{n-1}((-1)^i N^i - (-1)^{i+1} N^{i+1} \\
&= (-1)^0 N^0 - (-1)^n N^n \\
&= I
\end{aligned}$$

`[0/2 ptos]`