**PAUTA CONTROL 4 - MA11A-ALGEBRA**

(1998)

**Pregunta 1.**

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 2 & \alpha & -1 \\ 0 & -1 & 1 & \alpha-\beta & 1 \\ -2 & -1 & 2\alpha-1 & -\beta-1 & 3-\beta \\ 0 & 1 & -1 & \beta-1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \alpha/2 & 2\beta-3/2 \end{array}\right] \begin{array}{c} E_{1,3}(1,1) \\ \\ \to \\ \\ E_{1,5}(1,-2) \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 2 & \alpha & -1 \\ 0 & -1 & 1 & \alpha-\beta & 1 \\ 0 & -1 & 2\alpha+1 & \alpha-\beta-1 & 2-\beta \\ 0 & 1 & -1 & \beta-1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4\beta+2 \end{array}\right] \begin{array}{c} E_{2,3}(-1,1) \\ \\ \to \\ \\ E_{2,4}(1,1) \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 2 & \alpha & -1 \\ 0 & -1 & 1 & \alpha-\beta & 1 \\ 0 & 0 & 2\alpha & -1 & 1-\beta \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4\beta+2 \end{array}\right]$$

Observemos de la última ecuación que si $-4\beta+2 \neq 0$ no hay solución independientemente del valor del parámetro $\alpha \in I\!R$. Es decir si $\beta \neq 1/2$ <u>No hay solución</u>

Pongamosnos entonces en el caso $\beta = 1/2$ y analicemos los valores de $\underline{\alpha}$ :

(i) <u>*Si* $\alpha \neq 0$ *y* $\alpha \neq 1$</u> : entonces el sistema tiene única solución pues la matriz se escalona de manera perfecta. Calculemos dicha solución:

$$(\alpha-1)x_4 = 2 \Rightarrow x_4 = \frac{2}{\alpha-1}$$

$$2\alpha x_3 - x_4 = 1 - 1/2 = 1/2 \Rightarrow x_3 = \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{\alpha-1}\right)\cdot\frac{1}{2\alpha} = \frac{\alpha+3}{4\alpha(\alpha-1)}$$

$$
\begin{aligned}
-x_2 + x_3 + (\alpha - 1/2)x_4 = 1 \Rightarrow x_2 &= x_3 + (\alpha - 1/2)x_4 - 1 \\
&= \frac{\alpha+3}{4\alpha(\alpha-1)} + \frac{(2\alpha-1)}{(\alpha-1)} - 1 \\
x_2 &= \frac{\alpha + 3 + 8\alpha^2 - 4\alpha - 4\alpha^2 + 4\alpha}{4\alpha(\alpha-1)} = \frac{4\alpha^2+\alpha+3}{4\alpha(\alpha-1)}
\end{aligned}
$$

$$
2x_1 + 2x_3 + \alpha x_4 = -1 \Rightarrow 2x_1 = -1 - \frac{(\alpha+3)}{2\alpha(\alpha-1)} - \frac{2\alpha}{\alpha-1}
$$

$$
\Rightarrow x_1 = \frac{-1}{2} - \frac{(\alpha+3)}{4\alpha(\alpha-1)} - \frac{\alpha}{\alpha-1}
$$

(ii) $\underline{\text{Si } \alpha = 1}$: entonces la cuarta ecuación sería $0 = 2$ que indica que no hay solución, aún cuando $\beta = 1/2$.

(iii) $\underline{\alpha = 0 \wedge \alpha \neq 1}$: aquí pivoteamos una vez más:

$$
\left[\begin{array}{cccc|c}
2 & 0 & 2 & 0 & -1 \\
0 & -1 & 1 & -1/2 & 1 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 1/2 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
\underset{\Rightarrow}{E_{3,4}(1,-1)}
\left[\begin{array}{cccc|c}
2 & 0 & 2 & 0 & -1 \\
0 & -1 & 1 & -1/2 & 1 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 1/2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -3/2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
\begin{array}{c} \\ \\ \\ \leftarrow (*) \\ \\ \end{array}
$$

luego no hay solución por $(*)$.

Resumiendo:

1) $\beta \neq 1/2$ no hay solución.

2) $\beta = 1/2 : \alpha = 1$ no hay solución.
$\alpha = 0, \alpha \neq 1$ no hay solución.
$\alpha \neq 0, \alpha \neq 1$ "hay solución única" y "solución es ..."

**Pregunta 2.**

(i) Para ver si $P$ es invertible calculamos la inversa pivoteando:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{array}\right]$$

es invertible $P$ pues todos los pivotes son $> 0$. ($\neq 0$ basta).

La inversa es

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

(ii)

$$PD = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow PDP^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = A$$

Para calcular $A^{10}$ notemos que

$$\begin{aligned} A \cdot A = PDP^{-1}PDP^{-1} &= PDIDP^{-1} \\ &= PD^2P^{-1} \end{aligned}$$

y $A \cdot A \cdot A = PD^2P^{-1}PDP^{-1} = PD^2IDP^{-1} = PD^3P^{-1}$.

En general,

$$A^{10} = PD^{10}P^{-1} = P \begin{bmatrix} (-1)^{10} & & \\ & (-1)^{10} & \\ & & 2^{10} \end{bmatrix} P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2+2^{10} & 2^{10}-1 & 2^{10}-1 \\ 2^{10}-1 & 2+2^{10} & 2^{10}-1 \\ 2^{10}-1 & 2^{10}-1 & 2+2^{10} \end{bmatrix}$$

**Pregunta 3.**

(i) Busquemos $\binom{x}{y} \perp \binom{\mu_1}{\mu_2}$ y $\binom{x}{y} \perp \binom{v_1}{v_2}$. Esto corresponde a

$$\begin{aligned} x\mu_1 + y\mu_2 &= 0 \\ xv_1 + yv_2 &= 0 \end{aligned} \quad \text{o bien} \quad \begin{bmatrix} \mu_1 & \mu_2 & | & 0 \\ v_1 & v_2 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Este sistema homogéneo tiene solución única sólo si se puede escalonar de manera perfecta y en ese caso la solución es $\binom{0}{0}$.

Supongamos esto no es cierto, lo que puede ocurrir por varias razones:

(i) $\mu_1 = v_1 = 0$, en cuyo caso $\begin{pmatrix} 0 \\ \mu_2 \end{pmatrix} || \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \end{pmatrix}$ pues $\mu_2 \neq 0$ y $v_2 \neq 0$. Que es una contradicción.

(ii) Puedo suponer que $\mu_1 \neq 0$ sin perder generalidad (sino $v_1 \neq 0$ y puedo cambiar las filas). Pivotendo obtengo,

$$\begin{bmatrix} \mu_1 & \mu_2 & | & 0 \\ 0 & \mu_2 v_1 - v_2\mu_1 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Para que haya más de una solución se debe cumplir que $\mu_2 v_1 = v_2 \mu_1$ lo que dice que

$$v_2 = \frac{\mu_2}{\mu_1} v_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \mu_2/\mu_1 \end{pmatrix} = \frac{v_1}{\mu_1} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$$

Si $v_1 = 0 \Rightarrow v_2 = 0$ que es una contradicción , luego $v_1 \neq 0$ y $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ es paralelo a $\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$ que es otra

contradicción. Luego $\mu_2 v_1 - v_2 \mu_1, \neq 0$ y hay única solución $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(iii) Calculemos,$(A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2 = A + A \cdot B + BA + B$ pues $A^2 = A$ y $B^2 = B$. Luego $(A+B)^2 = A + B$ si y sólo si

$$\begin{aligned} A + A\cdot B + BB + B = A + B &\Leftrightarrow A \cdot B + B \cdot A = 0 \\ &\Leftrightarrow A \cdot B = -B \cdot A \end{aligned}$$

(iv) Calculemos,

$$
\begin{aligned}
(A(Z_0^{-1}) \cdot A(Z_0))_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} A(Z_0^{-1})_{ik} A(Z_0)_{kj} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (Z_0^{-1})^{(i-1)(k-1)} Z_0^{(k-1)(j-1)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} Z_0^{(k-1)((j-1)-(i-1))} \\
&= \sum_{k=1}^{n} Z_0^{(k-1)\cdot(j-1)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (Z_0^{(j-i)})^{k-1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{l} \text{si} \quad i = j \Rightarrow \\ \text{si} \quad i \neq j \Rightarrow \end{array}
\left\{
\begin{array}{l}
= \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (1)^{k-1} = n \\
= \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (Z_0^{(j-i)})^{k} = 0 \quad \text{por indicación}
\end{array}
\right.
$$

$$
\Rightarrow A(Z_0^{-1}) \cdot A(Z_0) = n \cdot I \Rightarrow A(Z_0) \text{ es invertible y su inversa es } \frac{1}{n} A(Z_0^{-1})
$$