PAUTA CONTROL 4
ALGEBRA MA11A

21 DE AGOSTO, 2003

Problema 1:

Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & \alpha \\ 2 & 1 & (\alpha+3) & -2 \end{pmatrix}$$

y el vector

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \beta \\ \beta^2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Estudiaremos las soluciones del sistema

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Estudie los valores de α y β de manera que:

(1) El sistema tenga una única solución. Encuentre la matriz inversa de A y calcule la única solución del sistema.

(2.5 ptos.)

(2) El sistema tenga infinitas soluciones y encuentre sus soluciones. Determine además el número de variables independientes.

(2.0 ptos.)

(3) El sistema no tenga solución

(1.5 ptos.)

Solución:
EStudiemos el sistema, para ello escribamos la matriz ampliada $(A|\mathbf{b})$, así tenemos que

$$
\begin{aligned}
(A|\mathbf{b}) &= \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & -1 & | & \beta \\ -1 & 1 & 0 & 1 & | & \beta^2 \\ 0 & 3 & 3 & \alpha & | & 0 \\ 2 & 1 & (\alpha+3) & -2 & | & -2 \end{array}\right) \longrightarrow \\
&= \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & -1 & | & \beta \\ 0 & 3 & 3 & 0 & | & \beta+\beta^2 \\ 0 & 3 & 3 & \alpha & | & 0 \\ 0 & -3 & (\alpha-3) & 0 & | & -2-2\beta \end{array}\right) \longrightarrow \\
&= \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & -1 & | & \beta \\ 0 & 3 & 3 & 0 & | & \beta+\beta^2 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & | & -\beta-\beta^2 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & | & -2-\beta+\beta^2 \end{array}\right) \longrightarrow \\
&= \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & -1 & | & \beta \\ 0 & 3 & 3 & 0 & | & \beta+\beta^2 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & | & -2-\beta+\beta^2 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & | & -\beta-\beta^2 \end{array}\right)
\end{aligned}
$$

así podemos analizar los diferentes casos.

(1) Si $\alpha \neq 0$ se tiene que la matriz A es invertible y luego el sistema tiene una única solución de la forma

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}.$$

Calculemos la matriz inversa A^{-1}. Para elo escribiremos la matriz ampliada

$$
(A|I_4) = \left(\begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & -1 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & \alpha & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & (\alpha+3) & -2 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow
$$

$$
\left(\begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & -1 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & | & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & \alpha & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & (\alpha-3) & 0 & | & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow
$$

$$
\left(\begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & -1 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & | & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & | & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & | & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow
$$

$$(A|I_4) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\alpha^{-1} & \alpha^{-1} & 0 & \alpha^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\alpha^{-1} & -\alpha^{-1} & \alpha^{-1} & 0 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 0 & (1-\alpha^{-1}) & -\alpha^{-1} & \alpha^{-1} & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\alpha^{-1} & \alpha^{-1} & 0 & \alpha^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\alpha^{-1} & -\alpha^{-1} & \alpha^{-1} & 0 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 0 & (1-\alpha^{-1}) & -\alpha^{-1} & \alpha^{-1} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\alpha^{-1} & \alpha^{-1} & 0 & \alpha^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\alpha^{-1} & -\alpha^{-1} & \alpha^{-1} & 0 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 0 & (1+2\alpha^{-1}) & -4\alpha^{-1} & \alpha^{-1} & -3\alpha^{-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & (1/3+\alpha^{-1}) & (1/3-\alpha^{-1}) & 0 & -\alpha^{-1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\alpha^{-1} & \alpha^{-1} & 0 & \alpha^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\alpha^{-1} & -\alpha^{-1} & \alpha^{-1} & 0 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & \left(-2/3-2\alpha^{-1}\right) & \alpha^{-1} & -\alpha^{-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & (1/3+\alpha^{-1}) & (1/3-\alpha^{-1}) & 0 & -\alpha^{-1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\alpha^{-1} & \alpha^{-1} & 0 & \alpha^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\alpha^{-1} & -\alpha^{-1} & \alpha^{-1} & 0 \end{array}\right)$$

Luego

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & \left(-2/3-2\alpha^{-1}\right) & \alpha^{-1} & -\alpha^{-1} \\ (1/3+\alpha^{-1}) & (1/3-\alpha^{-1}) & 0 & -\alpha^{-1} \\ -\alpha^{-1} & \alpha^{-1} & 0 & \alpha^{-1} \\ -\alpha^{-1} & -\alpha^{-1} & \alpha^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

y la solución única de nuestro sistema es

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1/3 & \left(-2/3-2\alpha^{-1}\right) & \alpha^{-1} & -\alpha^{-1} \\ (1/3+\alpha^{-1}) & (1/3-\alpha^{-1}) & 0 & -\alpha^{-1} \\ -\alpha^{-1} & \alpha^{-1} & 0 & \alpha^{-1} \\ -\alpha^{-1} & -\alpha^{-1} & \alpha^{-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ \beta^2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{\beta}{3} + \left(-\dfrac{2}{3} - 2\alpha^{-1}\right)\beta^2 + 2\alpha^{-1} \\ \beta(\dfrac{1}{3} + \alpha^{-1}) + \beta^2(\dfrac{1}{3} - \alpha^{-1}) + 2\alpha^{-1} \\ -\alpha^{-1}\beta + \alpha^{-1}\beta^2 - 2\alpha^{-1} \\ -\alpha^{-1}\beta - \alpha^{-1}\beta^2 \end{pmatrix}$$

(2) Si $\alpha = 0$ se tiene que la forma escalonada de nuestro sistema es

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & | & \beta \\ 0 & 3 & 3 & 0 & | & \beta + \beta^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & -2 - \beta + \beta^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & -\beta - \beta^2 \end{pmatrix},$$

luego el sistema tiene soución si

$$-\beta - \beta^2 = 0 \qquad \text{y} \qquad -2 - \beta + \beta^2 = 0,$$

es decir

$$\beta\,(1 + \beta) = 0 \qquad \text{y} \qquad (\beta - 2)\,(\beta + 1) = 0,$$

por lo tanto el sistema tiene infinitas soluciones si y sólo si

$$\alpha = 0 \qquad \text{y} \qquad \beta = -1,$$

por lo tanto la forma escalonada de nuestro sistema es

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & | & -1 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix},$$

de donde se tiene que tenemos dos variables independientes, y así si estas variables son z y w, entonces tenemos de la segunda ecuación que

$$3y + 3z = 0 \Longrightarrow y = -z,$$

además de la primera ecuación tenemos que

$$x + 2y + 3z - w = -1 \Longrightarrow x = -1 - 2y - 3z + w \Longrightarrow x = -1 + 2z - 3z + w = -1 - z + w,$$

luego las soluciones son de la forma

$$(x, y, z, w) = (-1, 0, 0, 0) + z \cdot (-1, -1, 1, 0) + w \cdot (1, 0, 0, 1).$$

(3) El sistema no tiene solución si $\alpha = 0$ y $\beta \neq -1$, ya que su forma escalonada es

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & | & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & -\beta - \beta^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & \beta^2 - \beta - 2 \end{pmatrix},$$

y la tercera o la cuarta solución nos dice que

$$0 = \text{ número diferente de } 0,$$

lo cual es imposible.

Problema 2:

(1) Sea $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ una matriz cualquiera. Se defina la **traza de A**, denotada por $\mathbf{tr(A)}$, como la suma de los elementos de la diagonal principal, es decir,

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Por otra parte, se define la función $f : \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, donde

$$f(A) = tr(AA^T).$$

Pruebe que:

(a) Dadas $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$,

$$tr(AB) = tr(BA).$$

(1.0 ptos.)

(b) $f(A) \geq 0,\ \forall A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, además muestre que

$$f(A) = 0 \Longleftrightarrow A = \mathbf{0},$$

donde $\mathbf{0}$ es la matriz nula de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

(1.0 ptos.)

(c) $f(A) = tr(A^T A)$.

(1.0 ptos.)

(2) Sea $M \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ una matriz tal que la matriz $\left(M^T M\right) \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ es invertible. Definamos la matriz $P \in \mathcal{M}_{m\times m}(\mathbb{R})$ como

$$P = I_m - M\left(M^T M\right)^{-1} M^T,$$

donde I_m es la matriz identidad de orden m.

Pruebe que

(a) $P^2 = P$. Muestre además que $PM = \mathbf{0}$, donde $\mathbf{0} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ es la matriz nula.

(1.0 ptos.)

(b) Pruebe que la matriz $(M^T M)$ es simétrica y muestre que la matriz P es también simétrica.

(1.0 ptos.)

(c) Pruebe que P no es invertible.

(1.0 ptos.)

Solución:

(1) (a) Sean $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, luego si $C = AB$ se tiene que sus elementos c_{ij} verifican

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj},$$

además si $D = BA$, entonces sus elementos son de la forma

$$d_{kj} = \sum_{i=1}^{n} b_{ki} a_{ij},$$

luego

$$\begin{aligned} tr(AB) &= \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki} \\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{ik} a_{ki} = \sum_{k=1}^{n} d_{kk} \\ &= tr(BA), \end{aligned}$$

lo que completa la demostración.

(b) Notemos que si $A = (a_{ij})$, entonces $A^T = (a_{ij}^T) = (a_{ji})$, por tanto si $C = AA^T$ se tiene que sus elementos son de la forma

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{kj}^T = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{jk},$$

por tanto

$$f(A = tr(AA^T) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{ik} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} (a_{ik})^2,$$

y luego se tiene que dado que es una suma de cuadrados

$$f(A) \geq 0, \quad \forall A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}).$$

Además

$$f(A) = 0 \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} (a_{ik})^2 = 0 \Longleftrightarrow a_{ik} = 0, \forall i, k = 1, \ldots, n \Longleftrightarrow A = \mathbf{0}.$$

(c) Notemos que en (a) probamos que

$$tr(AB) = tr(BA),$$

luego es inmediato que

$$f(A) = tr(AA^T) = tr(A^T A),$$

lo que completa la prueba.

(2) Definamos la matriz

$$P = I_m - M\left(M^T M\right)^{-1} M^T,$$

donde $M \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ es una matriz tal que la matriz $\left(M^T M\right) \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ es invertible.

(a) Se tiene de la asociatividad del producto de matrices

$$\begin{aligned} P^2 &= P \cdot P = \left(I_m - M\left(M^TM\right)^{-1}M^T\right) \cdot \left(I_m - M\left(M^TM\right)^{-1}M^T\right) \\ &= I_m - 2M\left(M^TM\right)^{-1}M^T + \left(M\left(M^TM\right)^{-1}M^T\right)\left(M\left(M^TM\right)^{-1}M^T\right) \\ &= I_m - 2M\left(M^TM\right)^{-1}M^T + M\left(M^TM\right)^{-1}\left(M^TM\right)\left(M^TM\right)^{-1}M^T \\ &= I_m - 2M\left(M^TM\right)^{-1}M^T + M\left(M^TM\right)^{-1}M^T \\ &= I_m - M\left(M^TM\right)^{-1}M^T = P, \end{aligned}$$

lo que prueba que P es idempotente.

Por otra parte, nuevamente de la asociatividad del producto de matrices se tiene lo siguiente,

$$\begin{aligned} PM &= \left(I_m - M\left(M^TM\right)^{-1}M^T\right)M \\ &= M - \left(M\left(M^TM\right)^{-1}M^T\right)M \\ &= M - M\left(M^TM\right)^{-1}\left(M^TM\right) \\ &= M - M = \mathbf{0}, \end{aligned}$$

lo que concluye la demostración.

(b) Veamos que $\left(M^TM\right)$ es una matriz simétrica. En efecto

$$\left(M^TM\right)^T = M^T\left(M^T\right)^T = M^TM,$$

lo que prueba que $\left(M^TM\right)$ es una matriz simétrica.

Por otra parte se tiene que de la simetría de $\left(M^TM\right)$ que

$$\begin{aligned} P^T &= \left(I_m - M\left(M^TM\right)^{-1}M^T\right)^T \\ &= I_m - \left(M\left(M^TM\right)^{-1}M^T\right)^T \\ &= I_m - \left(M^T\right)^T\left(\left(M^TM\right)^{-1}\right)^T M^T \\ &= I_m - M\left(\left(M^TM\right)^T\right)^{-1}M^T \\ &= I_m - M\left(\left(M^TM\right)^T\right)^{-1}M^T \\ &= I_m - M\left(M^TM\right)^{-1}M^T = P. \end{aligned}$$

(c) Veamos que P no es invertible, en efecto si P es invertible, entonces existe una matriz P^{-1} tal que

$$P \cdot P^{-1} = I_m,$$

por tanto de (a) como

$$PM = \mathbf{0},$$

se tiene que

$$0 = P^{-1}(PM) = \left(P^{-1}P\right)M = I_m M = M,$$

es decir, M es la matriz nula, luego

$$\left(M^T M\right) = \mathbf{0},$$

lo que es imposible ya qur por hipótesis $\left(M^T M\right)$es una matriz invertible, luego P no es invertible.