U. DE CHILE

INGENIERIA

Pauta Control #4 MA11A Álgebra

Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile.

Semestre Primavera 2004

El objetivo de esta pauta es orientar la corrección de los ayudantes y dar al alumno una guía de estudio. Es *responsabilidad del alumno* tener una copia de esta pauta para el día de la revisión de su prueba. Esta se puede obtener en la página:
`http://www.dim.uchile.cl/~lmella/MA11A.html` en formato ps o pdf.

P1.- Sean α, $\beta \in \mathbb{R}$ y considere el siguiente sistema lineal en las variables x_1, x_2, x_3

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & = & \beta \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & \alpha x_3 & = & 1 \end{array}$$

a) Determine los valores de α y β para los cuales el sistema tiene

i) (1 pto.) una única solución,

ii) (1 pto.) ninguna solución,

iii) (2 ptos.) infinitas soluciones y encuentre en este caso el conjunto solución.

b) (2 ptos.) Para $\alpha = 4$ encuentre la inversa de la matriz de coeficientes del sistema lineal anterior.

Pauta. Consideramos la matriz aumentada y utilizamos escalonamiento

a)

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & \beta \\ 3 & 4 & \alpha & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|cl} 1 & 2 & 3 & 1 & \\ 0 & -1 & -2 & \beta-2 & (2^a - 2\cdot 1^a) \\ 0 & -2 & \alpha-9 & -2 & (3^a - 3\cdot 1^a) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|cl} 1 & 2 & 3 & 1 & \\ 0 & -1 & -2 & \beta-2 & \\ 0 & 0 & \alpha-5 & 2-2\beta & (3^a - 2\cdot 2^a) \end{array}$$

Luego

i) existe una única solución si $\alpha \neq 5$,

ii) no existe solución si $\alpha = 5$ y $2 - 2\beta \neq 0$, es decir $\alpha = 5$ y $\beta \neq 1$,

iii) infinitas soluciones si $\alpha = 5$ y $\beta = 1$. En este caso la matriz aumentada queda

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

y luego el sistema lineal es equivalente a

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ & - & x_2 & - & 2x_3 & = & -1 \end{array}$$

Para encontrar el conjunto solución escribimos la última ecuación como

$$\begin{aligned} & -x_2 - 2x_3 = -1 \\ \Leftrightarrow \quad & x_2 + 2x_3 = 1 \\ \Leftrightarrow \quad & x_2 = 1 - 2x_3 \end{aligned}$$

Reemplazando en la primera ecuación

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1$$

con lo cual

$$\begin{aligned} x_1 &= -2x_2 - 3x_3 + 1 \\ &= -2(1 - 2x_3) - 3x_3 + 1 \\ &= -2 + 4x_3 - 3x_3 + 1 \\ &= -1 + x_3. \end{aligned}$$

Con esto el conjunto solución viene dado por

$$S = \{(-1 + x_3, 1 - 2x_3, x_3) : x_3 \in \mathbb{R}\} = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} : x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

(b) La matriz de coeficientes es:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

y para encontrar su inversa escalonamos la matriz A aumentada con una matriz identidad

$$\begin{array}{cccccccl} 1 & 2 & 3 & | & 1 & 0 & 0 & \\ 2 & 3 & 4 & | & 0 & 1 & 0 & (2^a - 2 \cdot 1^a) \\ 3 & 4 & 4 & | & 0 & 0 & 1 & (3^a - 3 \cdot 1^a) \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccl} 1 & 2 & 3 & | & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & -1 & -2 & | & -2 & 1 & 0 & \\ 0 & -2 & -5 & | & -3 & 0 & 1 & (3^a - 2 \cdot 2^a) \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccl} 1 & 2 & 3 & | & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & -1 & -2 & | & -2 & 1 & 0 & (\cdot(-1)) \\ 0 & 0 & -1 & | & 1 & -2 & 1 & (\cdot(-1)) \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccl} 1 & 2 & 3 & | & 1 & 0 & 0 & (1^a - 3 \cdot 3^a) \\ 0 & 1 & 2 & | & 2 & -1 & 0 & (2^a - 2 \cdot 3^a) \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & 2 & -1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccl} 1 & 2 & 0 & | & 4 & -6 & 3 & (1^a - 2 \cdot 2^a) \\ 0 & 1 & 0 & | & 4 & -5 & 2 & \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & 2 & -1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 0 & | & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 4 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & 2 & -1 \end{array}$$

Con lo cual

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 4 & -1 \\ 4 & -5 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Puntaje. a i) 0.5 por escalonar

0.5 por las condiciones

a ii) 0.5 por escalonar

0.5 por las condiciones

a iii) 0.5 por escalonar

0.5 por las condiciones

1.0 por el conjunto solución. No es necesario escribirlo como se hizo en la pauta, mientras esté correcto.

b) 0.2 por la matriz aumentada con la indentidad

1.8 por el resto

OBSERVACION: En ai) aii) y aiii) es necesario realizar previamente el escalonamiento de la matriz aumentada. Los 0.5 ptos. de cada parte suman 1.5 ptos que se asignan globalmente a la parte del escalonamiento. Luego en cada una de estas partes se asigna 0.5 por reconocer y encontrar correctamente las condiciones sobre α, β.

En las partes que requieran escalonamiento se debiera dar más importancia a el saber cómo funciona el método, que a la correctitud de las operaciones algebraicas en cada paso.

P2.- **a)** (2 ptos.) Determine si existe una matriz $M \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ de modo tal que para toda matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ se cumpla

$$M \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ a+c & d \end{bmatrix}.$$

Justifique ya sea encontrando M o por el contrario probando que no existe.

b) (1 pto.) Pruebe que si $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ verifica $A^2 + A + I = 0$ entonces es invertible.

c) Suponga que A y $B \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ conmutan, es decir

$$AB = BA.$$

Pruebe que

i) (1 pto.) $A^n B = BA^n \ \forall n \in \mathbb{N}$,

ii) (1 pto.) $A^t B^t = B^t A^t$, y

iii) (1 pto.) si además A y B son invertibles, entonces $A^{-1}B^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Pauta. **a)** Escribamos M de la forma

$$M = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$$

y tratemos de encontrar sus coeficientes x, y, z, w. Tenemos

$$M \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+yc & xb+yd \\ za+wc & zb+wd \end{bmatrix}$$

por lo que

$$M \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ a+c & d \end{bmatrix} \qquad \forall \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$$

es equivalente a que $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$ se cumplan las siguientes ecuaciones

(1) $ax + yc = a$

(2) $xk + yd = b$

(3) $za + wc = a + c$

(4) $zb + wd = d$

Entonces:

- eligiendo $a = 0, c = 1$ en (1) deducimos que $y = 0$,
- eligiendo $a = 1, c = 0$ en (1) deducimos que $x = 1$
- eligiendo $a = 0, c = 1$ en (3) deducimos que $w = 1$
- eligiendo $a = 1, c = 0$ en (3) deducimos $z = 1$.

Pero entonces (4) queda $b + d = d \quad \forall b, d$ lo que es imposible.
LA matriz NO existe
VARIANTE DE LO ANTERIOR: El argumento anterior es equivalente a plantear lo siguiente. Si existiese la matriz M, utilizando $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ se deduce que M debe cumplir

$$MI = I$$

y por lo tanto $M = I$. Pero entonces tendríamos

$$M \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = I \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ a+c & d \end{bmatrix}$$

para todo $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, lo que no es posible (basta considerar $a = 1$, $c = 1$ por ejemplo).

b) PRIMERA FORMA: Partimos de la información

$$A^2 + A + I = 0.$$

Luego, restando I en ambos lados

$$A^2 + A = -I.$$

Esto se puede escribir

$$A(A + I) = -I \iff A(-A - I) = I$$

y también

$$(A + I)A = -I \iff (-A - I)A = I.$$

Esto muestra que A es invertible.
SEGUNDA FORMA: Podemos utilizar el resultado que afirma que si una matriz cuadrada A tiene la propiedad

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \qquad (Ax = 0 \Longrightarrow x = 0)$$

entonces A es invertible. Veamos que la matriz A del enunciado cumple lo anterior. Multiplicando la ecuación matricial por $x \in \mathbb{R}^n$ tenemos

$$A^2x + Ax + x = 0 \qquad \iff \qquad AAx + Ax + x = 0.$$

Como $Ax = 0$ deducimos que $x = 0$. Luego A es invertible.

c) i)

$$\begin{aligned} A^n \cdot B &= \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{n \text{ veces}} \cdot B = A \cdot \ldots \cdot A \cdot B \cdot A \\ &= A \cdot \ldots \cdot A \cdot B \cdot A \cdot A \\ &\vdots \\ &= B \cdot A \cdot \ldots \cdot A \\ &= B \cdot A^n \end{aligned}$$

ii) $A^tB^t = (BA)^t = (AB)^t = B^tA^t$
iii) $A^{-1}B^{-1} = (BA)^{-1} = (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Puntaje. a) Se sugiere que el puntaje sea asignado de la siguiente forma:
0.5 puntos por la idea de plantear el problema como el buscar M o sus coeficiente x, y, z, w de la matriz M
0.5 por identificar condiciones necesarias sobre estos coeficientes, o M (como se planteó en la variante)
1.0 por llegar correctamente a la conclusión.

b) 1.0 pto.

c i) 1.0 pto. No es necesario utilizar inducción, es decir escribir unos o dos pasos para intercambiar A y B y utilizar la notación de ... es suficiente para la obtención de todo el puntaje.

c ii) 1.0 pto. Lo importante aquí es recordar la fórmula $(AB)^{-t} = B^{-t}A^{-t}$.

c iii) 1.0 pto. Lo importante aquí es recordar la fórmula $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

P3.- **a)** (2 ptos.) Verifique que las rectas

$$L_1 : \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix} \quad t \in \mathbb{R}, \qquad L_2 : \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix} \quad s \in \mathbb{R}$$

se intersectan en un único punto. Encuéntrelo.

b) Sea Π el plano con vectores directores $d_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ y $d_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ que pasa por el punto $P = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, y sea L la recta con vector director $d = \begin{bmatrix} 1 \\ b \\ 0 \end{bmatrix}$ que pasa por el punto $Q = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, donde $a, b \in \mathbb{R}$. Encuentre los valores de los parámetros a, b tales que

i) (2 ptos.) L esté contenida en Π (es decir $L \subset \Pi$),

ii) (1 pto.) L y Π no tengan puntos en común (es decir $L \cap \Pi = \emptyset$), y

iii) (1 pto.) $L \cap \Pi$ contenga exactamente un solo punto.

Pauta. **a)** Para mostrar que las rectas se intersectan y también encontrar el punto de intersección debemos encontrar s, t de manera que

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Este es un sistema de 3 ecuaciones en las variables t, s equivalente a

$$t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

En forma matricial se puede escribir

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 5 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Para resolver escalonamos la matriz aumentada

$$\left.\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 5 & -5 & -1 \end{array}\right. \longrightarrow \left.\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & -15 & -6 \end{array}\right. \longrightarrow \left.\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right.$$

Constatamos que existe solución del sistema de ecuaciones ya que en la última fila se obtuvo $0 = 0$ y además los coeficientes en la diagonal superior (1 y 5) son no nulos. Esto muestra que las rectas se intersectan. Además de la segunda fila deducimos la ecuación

$$5s = 2 \quad \text{es decir} \qquad s = \frac{2}{5}$$

con lo que el punto de intersección es

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} + \frac{2}{5} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 14 \\ 22 \\ 20 \end{bmatrix}$$

b) Tenemos la ecuación vectorial del plano:

$$\Pi : \qquad x = p + \alpha_1 d_1 + \alpha_2 d_2 \qquad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$$

y la ecuación vectorial de la recta:

$$L : \qquad x = q + \alpha d \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

i) Se tiene que $L \subset \Pi$ si y sólo si para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ existen $\alpha_1, \alpha_2 \in R$ tales que

$$p + \alpha_1 d_1 + \alpha_2 d_2 = a + \alpha d$$

o sea

$$p + \alpha_1 d_1 + \alpha_2 d_2 = a + \alpha d - p = \begin{bmatrix} a+\alpha \\ 2+\alpha b \\ -1 \end{bmatrix}$$

Este un sistema lineal en α_1, α_2 de la forma

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+\alpha \\ 2+\alpha b \\ -1 \end{bmatrix}$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$ son parámetros. Procedemos a resolver este sistema escalonando

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 4 & | & a+\alpha & \\ 2 & 0 & | & 2+\alpha b & (2^a - 2 \cdot 1^a) \\ 3 & 4 & | & -1 & (3^a - 3 \cdot 1^a) \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 4 & | & a \\ 0 & -8 & | & 2+\alpha b - 2a - 2\alpha \\ 0 & -8 & | & -1-3a-3\alpha \end{array}$$

Para que este sistema tenga solución se debe tener

$$2 + \alpha b - 2a - 2\alpha = -1 - 3a - 3\alpha$$

y esto debe ocurrir para todo α. Con $\alpha = 0$ vemos que necesariamente $2 - 2a = -1 - 3a$, luego $a = -3$. También es necesario que el coeficiente de α de ambos lados sea el mismo

$$b - 2 = -3,$$

es decir

$$b = -1.$$

La respuesta a la pregunta es: L está contenida en Π si y sólo si $a = -3$ y $b = -1$.

ii) $L \bigcap \Pi = \emptyset$ equivale a que no existan α_1, α_2, $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que

$$\alpha_1 d_1 + \alpha_2 d_2 + P = \alpha d + Q,$$

es decir, a que el sistema en las variables α_1, α_2, $\alpha \in \mathbb{R}$ dado por $\alpha_1 d_1 + \alpha_2 d_2 + P = \alpha d + Q$ no tenga solución . Este sistema se puede escribir así:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & b \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ -\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Consideramos la matriz aumentada y escalonamos para determinar bajo qué condiciones no existe solución:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 4 & 1 & | & a \\ 2 & 0 & b & | & 2 \\ 3 & 4 & 0 & | & -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 4 & 1 & | & a \\ 0 & -8 & b-2 & | & 2-2a \\ 0 & -8 & c-3 & | & -1-3a \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 4 & 1 & | & a \\ 0 & -8 & b-2 & | & 2-2a \\ 0 & 0 & -3-b+2 & | & -1-30-2+2a \end{array} \tag{2}$$

El sistema no tiene solución si

$$-3-b+2=0 \qquad \text{y} \qquad -1-3a-2+2a \neq 0$$

lo que es equivalente a

$$b=-1 \qquad \text{y} \qquad a \neq -3.$$

iii) La recta L y el plano Π tienen un único punto de intersección cuando el sistema dado por (1) posee una solución única. Ya se hizo el trabajo de escalonar la matriz aumentada y de (2) podemos afirmar entonces que existe un único punto de intersección si y sólo si

$$b \neq -1.$$

SEGUNDA FORMA: En algunas secciones ya se vio cómo obtener una ecuación Cartesiana del plano conociendo una ecuación vectorial. Para esto se requiere encontrar un vector normal al plano, por ejemplo mediante el producto cruz de los vectores directores

$$n = d_1 \times d_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 4 - 0\cdot 3 \\ -1\cdot 4 + 3\cdot 4 \\ -1\cdot 0 - 2\cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \\ -8 \end{bmatrix} = 8\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Se puede trabajar con $\tilde{n} = [1,1,-1]^t$ y una ecuación Cartesiana del plano viene dada por

$$\tilde{n} \cdot [x_1, x_2, x_3] = \tilde{n} \cdot P = -3,$$

es decir

$$x_1 + x_2 - x_3 = -3.$$

Luego un punto de la recta de la forma

$$Q + \alpha d = \begin{bmatrix} a+\alpha \\ \alpha b \\ 0 \end{bmatrix}$$

pertenece al plano Π si y sólo si

$$a + \alpha + \alpha b = -3.$$

Podemos responder entonces a las preguntas:

i) La recta L está contenida en Π si y sólo si para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ se cumple

$$a + \alpha + \alpha b = -3,$$

lo cual ocurre si y sólo si

$$a=-3 \qquad \text{y} \qquad b=-1.$$

ii) L y Π no se intersectan si y sólo si para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ tenemos

$$a + \alpha + \alpha b \neq -3.$$

Si $b \neq -1$ y a es cualquiera siempre se puede encontrar α de modo que se tenga la igualdad, basta considerar $\alpha = -\frac{3+a}{b+1}$. Luego necesitamos $b=-1$ y entonces para conseguir $a+\alpha+\alpha b \neq -3$ necesitamos $a \neq -3$.

Por lo tanto la respuesta es: L y Π no se intersectan si y sólo si

$$b=-1 \qquad \text{y} \qquad a \neq -3.$$

iii) L y Π se intersectan en un solo punto si y sólo si existe un único α tal que $a + \alpha + \alpha b = -3$. Esto ocurre cuando $b \neq 1$.

Puntaje. a) 0.5 por plantear el problema como un sistema de ecuaciones (lineales) en t, s

1.0 por resolverlo

0.5 por encontrar el punto

b i) 0.5 por plantear el problema correctamente: $\forall \alpha \ \exists \alpha_1, \alpha_2 \dots$

0.8 por escalonar la matriz

0.7 por plantear las condiciones y encontrar a, b

b ii) 0.2 por plantear que el problema es equivalente a probar que no existen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha$ tales que ... como un sistema

0.5 por escalonar la matriz

0.3 por encontrar las condiciones para que no exista solución

b iii) 0.2 por plantear que deben existir únicos $\alpha_1, \alpha_2, \alpha$ tales que ... como un sistema

0.5 por escalonar la matriz

0.3 por encontrar las condiciones para que no exista solución

b) SEGUNDA FORMA:

1.0 por encontrar un vector normal de Π

0.6 por la ecuación Cartesiana del plano

b i) 0.8

b ii) 0.8

b iii) 0.8

<u>OBSERVACION</u> En (b ii) y (b iii) (primera forma) el sistema que deben estudiar es el mismo y por lo tanto los 0.5 ptos. de cada una de estas partes se suman y se asignan de manera global por escalonar correctamente la matriz (1 pto.). Aquí es importante saber como escalonar (dar los pasos correctos) y hacerlo sin errores, aunque esto último tiene menos importancia que lo primero.