U. DE CHILE

INGENIERIA

Pauta Control #4 MA11A Álgebra

Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile.

Semestre Primavera 2005

El objetivo de esta pauta es orientar la corrección de los ayudantes y dar al alumno una guía de estudio. Es *responsabilidad del alumno* tener una copia de esta pauta para el día de la revisión de su prueba. Esta se puede obtener en la página:
`http://www.dim.uchile.cl/~lmella/MA11A.html` en formato ps o pdf.

Pregunta 1. Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & (3-\alpha)x_4 & = & \alpha \\ x_1 & + & x_2 & & & + & (\beta+\alpha+3)x_4 & = & \beta \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 2\alpha+2\beta \end{array}$$

en las variables x_1, x_2, x_3, x_4, donde α, $\beta \in \mathbb{R}$ son parámetros.

a) Aplique el método de escalonamiento (2,5 ptos.) y determine los valores de α y β de modo que

i) (0,5 ptos.) el sistema tenga una única solución,

ii) (0,5 ptos.) el sistema no tenga solución,

iii) (0,5 ptos.) el sistema tenga infinitas soluciones

b) (2 ptos.) Para $\alpha = -2$ y $\beta = 2$ encuentre el conjunto solución.

Pauta.

a) Aplicamos el método de escalonamiento:

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 3-\alpha & \alpha \\ 1 & 1 & 0 & \beta+\alpha+3 & \beta \\ 1 & 3 & 2 & 3 & 2\alpha+2\beta \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\alpha & \alpha-1 \\ 0 & -1 & -1 & \alpha+\beta & \beta-1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2\alpha+2\beta-1 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\alpha & \alpha-1 \\ 0 & 0 & -1 & \beta & \alpha+\beta-2 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha & \alpha+2\beta \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\alpha & \alpha-1 \\ 0 & 0 & -1 & \beta & \alpha+\beta-2 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha+\beta & 2\alpha+3\beta-2 \end{array} \qquad (1)$$

i) El sistema tiene una única solución si y sólo si $\alpha + \beta \neq 0$.

ii) Cuando $\alpha + \beta = 0$ y $2\alpha + 3\beta - 2 \neq 0$, no existe solución.
En este caso, la segunda condición se simplifica a $2\alpha - 3\alpha - 2 \neq 0$ es decir $-\alpha - 2 \neq 0$, o sea, $\alpha \neq -2$.

iii) Si $\alpha + \beta = 0$ y $2\alpha + 3\beta - 2 = 0$ existen infinitas soluciones.
Las condiciones se simplifican a $\alpha = -\beta$ y

$$2\alpha + 3\beta - 2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -2$$

Es decir $\alpha = -2, \beta = 2$.

b) Cuando $\alpha = -2, \beta = 2$, retomando (1) tenemos que encontrar el conjunto solución de

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Resolviendo

$$\begin{aligned} -x_3 + 2x_4 &= -2 \qquad \Longrightarrow x_3 = 2x_4 + 2 \\ x_2 + 2x_4 &= -3 \qquad \Longrightarrow x_2 = -2x_4 - 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 &= 1 \\ x_1 &= -2(-2x_4 - 3) - (2x_4 + 2) - 3x_4 + 1 \\ &= 4x_4 + 6 - 2x_4 - 2 - 3x_4 + 1 \\ &= -x_4 + 5 \end{aligned}$$

Así, el conjunto solución es

$$\left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ con } x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

Puntaje.

a) 2,5 por escalonar la matriz

a i) 0,5 por las condiciones

a ii) 0,5 por las condiciones

a iii) 0,5 por las condiciones

b) 2 por el conjunto solución

Pregunta 2.

a) i) (2 ptos.) Sean A, B matrices de $n \times m$ con coeficientes reales. Pruebe que

$$A = B \Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^m,\ \forall y \in \mathbb{R}^n \quad \langle Ax, y \rangle = \langle Bx, y \rangle.$$

Ind.: calcule $\langle Ae_1, e_2 \rangle$ donde $e_j = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)^T$ y el 1 está en la posición j.

ii) (2 ptos.) Sean A, B matrices de $n \times n$ **simétricas** con coeficientes reales. Pruebe que

$$A = B \iff \forall x \in \mathbb{R}^m \quad \langle Ax, x\rangle = \langle Bx, x\rangle.$$

b) (1 pto.) Demuestre que si una matriz cuadrada A verifica $A^n = I$ para algún natural $n \geq 1$, entonces A es invertible (I es la matriz identidad).

c) (1 pto.) Encuentre todas las matrices de la forma $A = \begin{bmatrix} x & z \\ 0 & y \end{bmatrix}$ que cumplen $A^2 = I$ (x, y, z reales; I es la matriz identidad).

Pauta.

a) i) Si $A = B$ claramente se tiene

$$Ax = Bx \quad \forall x \in \mathbb{R}^m \text{ y}$$
$$\langle Ax, y\rangle = \langle Bx, y\rangle \quad \forall x \in \mathbb{R}^m,\ \forall y \mathbb{R}^n.$$

Escribamos

$$A = (a_{ij})_{ij} \quad B = (b_{ij})_{ij}$$

y para $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^n$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Entonces

$$(Ax)_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\, x_j \quad \text{para } i \in \{1, \ldots, n\}$$
$$\langle Ax, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\, x_j\, y_i$$

Siguiendo la indicación, esto es, con

$$e_1 = [1, 0, \ldots, 0]^T \in \mathbb{R}^m$$
$$e_2 = [0, 1, 0, \ldots, 0]^T \in \mathbb{R}^n$$

vemos que

$$\langle Ae_1, e_2\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_{i1} \;\; y_i = a_{21}$$

Similarmente

$$\langle Be_1, e_2\rangle = b_{21}$$

y de $\langle Ae_1, e_2\rangle = \langle Be_1, e_2\rangle$ deducimos $a_{21} = b_{21}$.
Esto se puede generalizar: $e_k \in \mathbb{R}^m, e_\ell \in \mathbb{R}^n$

$$\langle Ae_k, e_\ell\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} (e_k)_j (e_\ell)_i$$

donde $(e_k)_j$ denota la componente j de e_k, la cual es 1 si $j = k$ y 0 si $j \neq k$.
Así

$$\begin{aligned}\langle Ae_k, e_\ell \rangle &= \sum_{i=1}^{n} \quad a_{ik}(e_\ell)_i \\ &= a_{\ell k}\end{aligned}$$

De la relación $\langle Ae_k, e_\ell \rangle = \langle Be_k, e_\ell \rangle$ deducimos que $a_{\ell k} = b_{\ell k}$ para todo $\ell \in \{1, \ldots, n\}$, $k \in \{1, \ldots, m\}$, es decir $A = B$.

iii) Nuevamente $A = B \Rightarrow \langle Ax, x \rangle = \langle Bx, x \rangle \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$.
Para la recíproca, todavía podemos proceder como en a) con $x = e_k$

$$\langle Ae_k, e_k \rangle = a_{kk} \quad \langle Be_k, e_k \rangle = b_{kk}$$

y se deduce $a_{kk} = b_{kk} \quad \forall k \in \{1, \ldots, n\}$, por lo que los elementos de la diagonal de A y B son los mismos.
Para obtener información para los elementos fuera de la diagonal utilicemos la hipótesis con $x = e_k + e_\ell$.
Así

$$\begin{aligned}&\langle A(e_k + e_\ell), e_k + e_\ell \rangle \\ &= \langle Ae_k, e_k \rangle + \langle Ae_k, e_\ell \rangle + \langle Ae_\ell, e_k \rangle + \langle Ae_\ell, e_\ell \rangle\end{aligned}$$

(por las propiedades del producto interno) y luego

$$\langle A(e_k + e_\ell), e_k + e_\ell \rangle = a_{kk} + a_{\ell k} + a_{k\ell} + a_{\ell\ell}$$

Similarmente

$$\langle B(e_k + e_\ell), e_k + e_\ell \rangle = b_{kk} + b_{\ell k} + b_{k\ell} + b_{\ell\ell}$$

y de las hipótesis se deduce

$$a_{kk} + 2a_{k\ell} + a_{\ell\ell} = b_{kk} + 2b_{k\ell} + b_{\ell\ell}$$

(hemos utilizado también la simetría de A y B).
Como $a_{kk} = b_{kk}$ obtenemos

$$a_{k\ell} = b_{k\ell} \quad \forall \ell, k \in \{1, \ldots, n\}.$$

Se concluye que $A = B$.

b) Supongamos $A^n = I$. Veamos que la única solución posible de $Ax = 0$ es $x = 0$.
Si $Ax = 0, A^2x = 0$ y por inducción $A^n x = 0$.
Pero $A^n x = Ix = x$ y luego $x = 0$.
Un teorema conocido nos permite concluir que A es invertible.

c) Si $A = \begin{bmatrix} x & z \\ 0 & y \end{bmatrix}$, tenemos

$$A^2 = \begin{bmatrix} x & z \\ 0 & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & z \\ 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2 & xz + yz \\ 0 & y^2 \end{bmatrix}$$

Luego $A^2 = I \Leftrightarrow x^2 = 1, y^2 = 1, xz + yz = 0$. De $x^2 = 1$ vemos que $x = \pm 1$ e $y^2 = 1$ implica $y = \pm 1$.

Distingamos los casos siguientes:

- $x = 1$, $y = 1$. En este caso de $z(x + y) = 0$ deducimos $z = 0$. En este caso $A = I$.

- $x=-1$, $y=-1$. En este caso de $z(x+y)=0$ deducimos $z=0$ y luego $A=-I$.
- $x=1$, $y=-1$. En este caso de $z(x+y)=0$ no resulta ninguna restricción, y por lo tanto $z\in\mathbb{R}$.
- $x=-1$, $y=1$. Este caso es similar al anterior y $z\in\mathbb{R}$.

La conclusión es que si $A=\begin{bmatrix} x & z \\ 0 & y \end{bmatrix}$ y satisface $A^2=I$ entonces: $A=I$ o $A=-I$ o $A=\begin{bmatrix} 1 & z \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ con $z\in\mathbb{R}$ o $A=\begin{bmatrix} -1 & z \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ con $z\in\mathbb{R}$.

Puntaje.

a i) 0,5 por calcular correctamente $\langle Ae_1, e_2\rangle$

0,5 por la fórmula más general $\langle Ax, y\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\, x_j\, y_i$

1,0 para concluir

a ii) 0,5 por la conclusión $a_{kk}=b_{kk}$

0,5 por la idea de elegir x e y adecuados

0,5 por el manejo algebraico con el producto interno

0,5 para concluir

b) 0,5 por la idea de utilizar el teorema:

A matriz cuadrada con $(\forall x\in\mathbb{R}^n)\; Ax=0 \Longrightarrow x=0$, implica A invertible.

0,5 por demostrar la propiedad $(\forall x\in\mathbb{R}^n)\; Ax=0 \Longrightarrow x=0$ a partir de la hipótesis.

c) 0,3 por calcular correctamente A^2 y llegar a ecuaciones para x, y, z

0,7 por encontrar todas las soluciones posibles, analizando por casos.

Pregunta 3. Se define las rectas

$$L_1 : \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad t\in\mathbb{R} \qquad \text{y} \qquad L_2 : \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad s\in\mathbb{R}.$$

a) (1,5 ptos.) Verifique que L_1 y L_2 no se intersectan.

b) (1,5 ptos.) Encuentre la ecuación normal del plano Π que contiene a la recta L_1 y es paralelo a L_2.

c) (1,5 ptos.) El punto $P=\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ pertenece a L_2. Encuentre la proyección ortogonal de P sobre el plano Π de la parte b).

d) (1,5 ptos.) De la ecuación del plano paralelo a Π que está a la misma distancia de L_1 y L_2 (Π es el plano de la parte b)).

Pauta.

a) Trataremos de encontrar $s, t\in\mathbb{R}$ tales que

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \tag{2}$$

$$\Leftrightarrow \qquad t\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Mirando la primera componente tenemos que $t = 4$.
De la segunda componente

$$\begin{aligned} 2t - s &= -1 \\ 8 - s &= -1 \\ s &= 9 \end{aligned}$$

Pero la tercera componente dice

$$\begin{aligned} -2t + 2s &= -2 \\ -2 \cdot 4 + 2 \cdot 9 &= -2 \\ -8 + 18 &= -2 \\ 10 &= -2 \end{aligned}$$

Esto es imposible, luego no existe $s, t \in \mathbb{R}$ que cumplan (2) y se deduce que L_1 y L_2 no intersectan.

b) Como Π contiene a L_1, el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ es vector director de Π.

Del hecho que Π es paralelo a L_2 tenemos que $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ también es vector director de Π. Estos dos vectores son no paralelos.

Como $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \in L_1$, el plano queda descrito por

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{con } s, t \in \mathbb{R}$$

Encontraremos la forma normal. Para esto necesitamos un vector N perpendicular a $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$. Escribimos $N = [n_1, n_2, n_3]^T$. Luego queremos que

$$\begin{aligned} n_1 + 2n_2 - 2n_3 &= 0 \\ n_2 - 2n_3 &= 0 \end{aligned}$$

Entonces $n_2 = 2n_3$ y $n_1 = -2n_2 + 2n_3 = -2 \cdot 2n_3 + 2n_3 = -2n_3$.
Así un posible vector N viene dado por $\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.
Se puede encontrar un vector normal calculando el producto cruz

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Luego la ecuación buscada es

$$\left\langle \vec{x} - \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = 0, \quad \text{con } \vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$
$$\iff -2(x+1) + 2(y-2) + z - 1 = 0$$

c) Llamemos P_0 a la proyección de $P = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ sobre Π.

Entonces buscamos P_0 de la forma

$$P_0 = P + \lambda N = = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

P_0 pertenece a Π si cumple la ecuación

$$\left\langle P_0 - \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = 0$$

$$\left\langle \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = 0$$

$$\left\langle \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle + \lambda \left\langle \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = 0$$

$$-8 - 2 - 2 + \lambda \cdot 9 = 0$$

$$\lambda = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

Así $P_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{4}{3} \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 - \frac{8}{3} \\ 1 + \frac{8}{3} \\ -1 + \frac{4}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 11 \\ 1 \end{bmatrix}$

d) El plano Π_1 buscado tiene vector normal $\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ y debe pasar por el punto medio del segmento que une P_0 con P. Este punto medio viene dado por

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(P_0 + P) &= \frac{1}{2}\left(P + \frac{4}{3}N + P\right) = P + \frac{2}{3}N \\ &= \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{2}{3} \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4/3 \\ 4/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 - 4/3 \\ 1 + 4/3 \\ -1 + 2/3 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Luego la ecuación del plano buscado es

$$\left\langle \vec{x} - \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = 0 \quad , \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\iff -2(x - 5/3) + 2(y - 7/3) + (z + 1/3) = 0$$

Puntaje.

a) 0,3 por formular el problema como el de verificar que el sistema de 3 ecuaciones en s y t no tiene solución

1,2 por verificar que no existen s, t que resuelvan el sistema

b) 0,5 por la idea de construir el plano con los vectores directores de las rectas L_1, y L_2
   0,5 por encontrar un vector normal al plano (producto cruz u otro argumento)
   0,5 por la ecuación normal del plano

c) 0,3 por plantear algún camino válido para encontrar la proyección (como el sugerido en esta pauta)
   1,2 por el resultado

d) 0,3 por plantear que el plano buscado tiene la misma normal que el plano Π
   1,0 por encontrar un punto del plano buscado (como el punto medio entre P y su proyección)
   0,2 por concluir