Pauta Control 4 MA11A ALGEBRA
Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile
Semestre 2006-1 (26 de Agosto) Problema 1

i) Escalonando la matriz aumentada asociada al sistema se obtiene

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\alpha & -\beta & 0 \\ \alpha & \beta & 0 & 0 & 0 \\ \beta & \beta & \alpha & 0 & \beta \\ 0 & 1 & \alpha & \beta & \alpha \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\alpha & -\beta & 0 \\ 0 & \beta & \alpha^2 & \alpha\beta & 0 \\ 0 & \beta & \alpha\beta+\alpha & \beta^2 & \beta \\ 0 & 1 & \alpha & \beta & \alpha \end{array}\right)$$

Permutando filas 2 y 4 y luego escalonando

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\alpha & -\beta & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & \beta & \alpha \\ 0 & \beta & \alpha\beta+\alpha & \beta^2 & \beta \\ 0 & \beta & \alpha^2 & \alpha\beta & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\alpha & -\beta & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & \beta & \alpha \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & \beta-\alpha\beta \\ 0 & 0 & \alpha^2-\alpha\beta & \alpha\beta-\beta^2 & -\alpha\beta \end{array}\right)$$

(2.0 ptos.)

Si $\alpha = 0$ y $\beta \neq 0$ no existe solución ya que en la tercera fila se produce una igualdad imposible $(0 = \beta \neq 0)$.

Si $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$ y $\alpha = \beta$ no existe solución pues en la última fila se produce la igualdad imposible $0 = -\beta^2 \neq 0$.

Si $\alpha = \beta = 0$ existen infinitas soluciones ya que en las filas 3 y 4 se producen solo ceros.

(1.5 ptos.)

Para $\alpha \neq 0$ y $\alpha \neq \beta$ seguimos escalonando y usando α como pivote

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\alpha & -\beta & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & \beta & \alpha \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & \beta-\alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & \beta(\alpha-\beta) & -\alpha\beta-(\alpha-\beta)(\beta-\alpha\beta) = \beta(\alpha^2-\alpha\beta-2\alpha+\beta) \end{array}\right)$$

Si $\beta = 0$ existen infinitas soluciones ya que la última fila contiene puros ceros.

Entonces para que la solución del sistema sea única se requiere que $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$ y $\alpha \neq \beta$.

Resumiendo:

1) El sistema tiene infinitas soluciones si $\alpha = \beta = 0$ o cuando $\alpha \neq 0$ y $\beta = 0$. Es decir para $\beta = 0$ independiente de α.

(Comentario: No se pide, pero puede agregarse que si $\alpha = \beta = 0$ quedan dos variables libres y si $\alpha \neq 0, \beta = 0$ queda una variable libre, pero en ambos casos hay infinitas soluciones).

2) El sistema no tiene solución si $\alpha = 0$ y $\beta \neq 0$ o cuando $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$ y $\alpha = \beta$.

3) El sistema tiene solución única si $\alpha \neq 0, \beta \neq 0, \alpha \neq \beta$ (1.5 ptos.)

ii) Para el caso $\alpha = 2,\ \beta = 1$ existe, entonces, solución única.

La matriz ampliada queda:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Así:

$$\begin{aligned} &x_4 = -1 \\ &2x_3 = -1 \Rightarrow x_3 = -\frac{1}{2} \\ &x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \Rightarrow x_2 - 1 - 1 = 2 \Rightarrow x_2 = 4 \\ &x_1 - 2x_3 - x_4 = 0 \Rightarrow x_1 + 1 + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -2 \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -1/2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(1.0 pto.)

Pauta Control 4 MA11A ALGEBRA
Semestre 2006-1 (26 de Agosto)
Problema 2

i) Para verificar la no colianealidad de P, Q y R bastará escribir los vectores PQ y PR, coincidentes en P, y comprobar que no son paralelos

$$P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$PQ = Q - P = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ o bien } \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \; PR = R - P = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ o bien } \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $PQ \neq \lambda \cdot PR$, de donde PQ no es paralelo en PR.

Así, los puntos P, Q, R definen un único plano π_1. (1.0 pto.)

Plano π_1: Podemos usar, por ejemplo, $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ como posición y $PQ = d_1, PR = d_2$ como vectores directores. La ecuación vectorial (o paramétrica) de π_1 quedará:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ o bien } \begin{array}{c} x = 2s - t \\ y = -1 + 2s \\ z = s + t + 1 \end{array}$$

Entonces, eliminando s y t queda $x + z = 3s + 1 = \frac{y+1}{2} \cdot 3 + 1$

Así, la ecuación cartesiana es $\pi_1 : 2x - 3y + 2z = 5$ (1.0 pto.)

OBSERVACION: Existen varias alternativas más para la elección del punto posición y los vectores directores.

ii) Un vector director de L_1 es $d_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Para L_2 tomaremos dos puntos de la recta, por ejemplo, $T_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} \in L_2$ y $T_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ -5 \end{pmatrix} \in L_2$ (Hay infinitas alternativas). Así, un vector director de L_2 será $d_2 = T_1T_2 = T_2 - T_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$. Entonces $d_1 = d_2$, es decir $L_1 // L_2$ y, por ejemplo $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in L_1$ pero $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin L_2$, por lo tanto, L_1 y L_2 son paralelas y distintas (coplanares). (1.0 pto.)

Plano π_2: Podemos escribirlo usando $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ como posición, $d_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ director del paralelismo y cualquier otro vector director por ejemplo $d_2 = MT_1$ con $M = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in L_1$ y $T_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} \in L_2$

Así $MT_1 = T_1 - M = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$ o bién $d_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Entonces la ecuación vectorial (o paramétrica) de π_2 es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M + sd_1 + td_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\text{o bién } \begin{cases} x = 1 + s + t \\ y = -1 - 3s + 3t \\ z = 1 + 6t \end{cases}$$

De donde, eliminando s y t: $3x + y = 2 + 6t = 2 + z - 1$, por lo tanto, la ecuación cartesiana es $\pi_2 : 3x + y - z = 1$ (1.0 pto.)

iii) Para $L = \pi_1 \cap \pi_2$.

De los planos π_1 y π_2 es fácil encontrar dos puntos comunes a ambos planos (el sistema tiene infinitas soluciones).

Por ejemplo $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ -8 \end{pmatrix}$.

Así, la recta común a ambos planos por A (posición) y vector director $d = BA = A - B$ será:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ -8 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix}$$

(1.0 pto.)

iv) Para $S = L_1 \cap L,\ L_1 : \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $L : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix}$

El punto común S debe cumplir

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix} \text{ o bién } \begin{cases} \lambda - u = 0 \\ -3\lambda - 8u = 2 \\ -11u = 2 \end{cases}$$

Es inmediato que $\lambda = u = -\frac{2}{11}$ es solución, de modo que

$$L_1 \cap L = S = \begin{pmatrix} 1 - 2/11 \\ -1 + 6/11 \\ 1 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/11 \\ -5/11 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por último, es inmediato que $S \in \pi_1$ pues en $2x - 3y + 2z = 5$
se verifica que $18/11 + 15/11 + 2 \equiv 5$. 1.0 pto.)

Observación: El sistema en λ, u anterior, se puede resolver también matricialmente escalonando.

Pauta Control 4 MA11A ALGEBRA
Semestre 2006-1 (26 de Agosto)
Problema 3

a) Considere las matrices cuadradas $A, B \in M_{nn}$. Demuestre que:

i) A es invertible si y solo si AA^T es invertible

($\Rightarrow$) Si A es invertible, su transpuesta A^T es invertible y el producto de matrices invertibles es invertible. Así AA^T es invertible. (0.5 ptos.)

($\Leftarrow$) Sea AA^T invertible y su inversa será $(AA^T)^{-1}$

es decir $(AA^T)(AA^T)^{-1} = I \overset{asociat.}{\Leftrightarrow} A(A^T(AA^T)^{-1}) = I$.

Entonces A es invertible y su inversa $A^{-1} = A^T(AA^T)^{-1}$ (1.0 pto.)

ii) Si $A^2 = A \wedge B = I - A \Rightarrow B^3 = B$ y si A es invertible, utilice las condiciones dadas para determinar qué matrices específicas son A y B.

Calculemos $B^2 = B \cdot B = (I - A)(I - A)$, por lo tanto,

$$B^2 = I^2 - IA - AI + A^2 = I - 2A + A = I - A = B$$

Así, $B^2 = B \Rightarrow BB^2 = B \cdot B \Rightarrow B^3 = B^2 = B$

Entonces $B^3 = B$. (0.8 ptos.)

Si A es invertible, usando $A^2 = A$

$$\Rightarrow A^{-1}A^2 = A^{-1}A \Rightarrow (A^{-1}A)A = I \Rightarrow IA = I$$

Entonces $A = I \in M_{nn}$

Además $B = I - A = I - I$ así $B = 0 \in M_{nn}$. (0.7 ptos.)

b) Considere los vectores $u, v \in \mathbb{R}^n - \{0\}$. Se define la matriz $A \in M_{nn}$ por $A = uv^T$

i) Pruebe que $\forall x \in \mathbb{R}^n \quad Ax = 0 \Leftrightarrow v^T x = 0$

Indicación: Observe que $v^T x \in \mathbb{R}$

($\Leftarrow$) $Ax \underset{def}{=} (uv^T)x \underset{Asociat.}{=} u(v^T x) \underset{hipot.}{=} u \cdot 0 = 0$

Así $Ax = 0$ (0.5 ptos.)

($\Rightarrow$) Sea $Ax = 0 \overset{hipot.}{\Rightarrow} (uv^T)x = 0 \overset{asociat.}{\Rightarrow} u(v^T x) = 0$

pero $v^T x = (v_1, v_2, ..., v_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = v_1x_1 + v_2x_2 + ... + v_nx_n = r$ es decir $v^T x = r \in \mathbb{R}$

es un escalar. Así $\forall x \in \mathbb{R}^n \quad Ax = 0 \Rightarrow ru = 0$ con $u \neq 0 \Rightarrow r = 0$.

Entonces $v^T x = 0$ (1.0 pto.)

ii) Encuentre el número de variables libres en la resolución de $Ax = 0$.

Es A invertible?

Como $Ax = 0 \Leftrightarrow v^T x = 0 \Rightarrow v_1x_1 + v_2x_2 + ... + v_nx_n = 0$ el sistema se reduce a una sola ecuación con n variables. Tomando i tal que $v_i \neq 0$, se puede despejar x_i y dejar libres las otras $n-1$ variables. Entonces hay $n-1$ variables libres. (0.8 ptos.)

Además $Ax = 0 \Rightarrow v_1x_1 + v_2x_2 + ... + v_nx_n = 0$ que admite infinitas soluciones ($x = 0$ es solo una de ellas) Así $Ax = 0$ no tiene solución única, que equivale a establecer que A NO es invertible. (0.7 ptos.)