MA-11A Álgebra **5 de Octubre, 2000**

Pauta Control No. 5

PROBLEMA 1:

(i.1).- Un vector director de la recta que pasa por Q y R es $D = R - Q$. Luego,

$$P^* = Q + \langle P - Q, D\rangle \frac{D}{||D||^2}.$$

Evaluando, se obtiene que $D = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $||D||^2 = 20$, $P - Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\langle P - Q, D\rangle = 10$, y

$$P^* = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{10}{20}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(i.2).- Como la recta pasa por P^*, dicho punto se puede tomar como vector posición de L. Necesitamos determinar un vector director de la recta. Dicho vector debe ser ortogonal al plano Π que pasa por P, Q, y R. Luego, bastará tomar como vector director de L un vector N normal de Π. Un tal N esta dado por $(R - Q) \times (P - Q)$. Como $R - Q = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $P - Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, se tiene que

$$N = \begin{vmatrix} \widehat{i} & \widehat{j} & \widehat{k} \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2\widehat{i} - 4\widehat{j} + 10\widehat{k} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Sigue que

$$L \; : \; v = P^* + \lambda N, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

(ii).- Hay varias formas de hacer esta parte. Discutiremos dos de ellas.

- **Primera Forma**: Lo que necesitamos es calcular los valores de λ para los cuales la proyección de $v - P = \lambda D$ sobre un vector normal de Π sea igual a ± 2. Luego, debemos determinar un vector N normal a Π. Tomemos $N = D_1 \times D_2$, i.e.,

$$N = \begin{vmatrix} \widehat{i} & \widehat{j} & \widehat{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2\widehat{i} - 4\widehat{j} + 4\widehat{k} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Luego, la proyección de $v - P = \lambda D$ sobre N es ± 2 sí y sólo si

$$\frac{\langle \lambda D, N\rangle}{||N||} = \pm 2.$$

Como $\langle \lambda D, N\rangle = \lambda\langle D, N\rangle = \lambda(4+4-4) = 4\lambda$ y $||N|| = \sqrt{2^2+(-4)^2+4^2} = 6$, sigue que $\lambda = \pm 3$. Luego, hay dos puntos en L a distancia 2 de Π y estos son

$$v \;=\; P \pm 3D \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \pm 3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

i.e.,

$$\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

- **Segunda Forma**: Determinamos los planos Π_1 y Π_2 que están a distancia 2 del plano Π que pasa por P, Q, y R y los intersectamos con la recta L. Primero determinamos un vector $N = D_1 \times D_2$ normal al plano Π, i.e.,

$$N \;=\; \begin{vmatrix} \widehat{i} & \widehat{j} & \widehat{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & 1 \end{vmatrix} \;=\; 2\widehat{i} - 4\widehat{j} + 4\widehat{k} \;=\; \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Como $||N|| = \sqrt{2^2+(-4)^2+4^2} = 6$, normalizando N obtenemos

$$\widehat{N} \;=\; \frac{N}{||N||} \;=\; \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \Pi_1 \;&:\; v = (P + 2\widehat{N}) + \lambda_1 D_1 + \lambda_2 D_2\,, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \\ \Pi_2 \;&:\; v = (P - 2\widehat{N}) + \lambda_1 D_1 + \lambda_2 D_2\,, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Para encontrar la intersección entre L y Π_1, debemos resolver

$$P + \lambda D \;=\; (P + 2\widehat{N}) + \lambda_1 D_1 + \lambda_2 D_2\,.$$

Equivalentemente,

$$\lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \;=\; 2 \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Resolviendo el sistema (hay varias formas de hacerlo) se llega a que $\lambda = 3$. Luego, L se intersecta con Π_1 en el punto,

$$v \;=\; P + 3D \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Análogamente, se obtiene que L intersecta a Π_2 en el punto,

$$v \;=\; P - 3D \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

PROBLEMA 2:

(i).- Supongamos que f es lineal. Como $0_V \in V$, entonces $(0_V, f(0_V)) \in G_f$, luego $G_f \neq \emptyset$. Para establecer que G_f es sub–espacio vectorial de $V \times W$ bastará verificar que cualquiera sean $(v,w), (v',w') \in G_f$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se tiene que $\alpha(v,w)+\beta(v',w') \in G_f$. En efecto, $\alpha(v,w)+\beta(v',w') = (\alpha v+\beta v', \alpha w+\beta w')$ y como f es lineal,

$$f(\alpha v + \beta v') \;=\; \alpha f(v) + \beta f(v) \;=\; \alpha w + \alpha w'\,,$$

donde la última igualdad es consecuencia del hecho que $(v,w), (v',w') \in G_f$. Sigue que $\alpha(v,w) + \beta(v',w') \in G_f$ como queríamos comprobar.

Supongamos ahora que G_f es sub–espacio vectorial de $V \times W$. Para establecer que f es lineal bastará verificar que cualquiera sean $v, v' \in V$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $f(\alpha v + \beta v') = \alpha f(v) + \beta f(v')$. Esto último equivale a probar que $(\alpha v + \beta v', \alpha f(v) + \beta f(v')) \in G_f$. Pero esto es obvio puesto que $(\alpha v + \beta v', \alpha f(v) + \beta f(v')) = \alpha(v, f(v)) + \beta(v', f(v'))$, luego dado que $(v, f(v)), (v', f(v')) \in G_f$ y que G_f es un espacio vectorial, se concluye que $(\alpha v + \beta v', \alpha f(v) + \beta f(v')) \in G_f$.

(ii).- Como $(0_V, 0_W) \in (\{0_V\} \times W)$ se tiene que $(\{0_V\} \times W) \neq \emptyset$. Para establecer que $(\{0_V\} \times W)$ es sub–espacio vectorial de $V \times W$ bastará verificar que cualquiera sean $(v,w), (v',w') \in (\{0_V\} \times W)$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se tiene que $\alpha(v,w) + \beta(v',w') \in (\{0_V\} \times W)$. En efecto, $(v,w), (v',w') \in (\{0_V\} \times W)$ implica que $v, v' \in \{0_V\}$, i.e., $v = v' = 0_V$. Luego,

$$\alpha(v,w) + \beta(v',w') = (\alpha 0_V + \beta 0_V, \alpha w + \beta w') = (0_V, \alpha w + \beta w') \in (\{0_V\} \times W)\,,$$

donde la última pertenencia es consecuencia del hecho que W es espacio vectorial, luego $\alpha w + \beta w' \in W$ dado que $w, w' \in W$.

(iii).- Debemos demostrar que $G_f + (\{0_V\} \times W) = V \times W$ y, dado que $\{(0_V, 0_W)\}$ es el neutro aditivo de $V \times W$, que $G_f \cap (\{0_V\} \times W) = \{(0_V, 0_W)\}$.

- Veamos que $V \times W \subseteq G_f + (\{0_V\} \times W)$. La otra inclusión es obvia. Sea entonces $(v,w) \in V \times W$. Claramente
$$(v,w) \;=\; (v, f(v)) + (0_V, w - f(v)) \;\in\; G_f + (\{0_V\} \times W)\,.$$
- Veamos que $G_f \cap (\{0_V\} \times W) \subseteq \{(0_V, 0_W)\}$. La otra inclusión es obvia. Sea entonces $(v,w) \in G_f \cap (\{0_V\} \times W)$. Como $(v,w) \in G_f$, sigue que $w = f(v)$, y como $(v,w) \in (\{0_V\} \times W)$, se tiene que $v = 0_V$. Además, como f es lineal, $f(0_V) = 0_W$. Luego, $w = f(v) = f(0_V) = 0_W$. Hemos concluido que $(v,w) = (0_V, 0_W)$ como deseábamos.

PROBLEMA 3:

(i.1).- Basta observar que

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 1 - 1 - 1 + 1 = 0\,, \quad \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 2 - 1 - 2 + 1 = 0\,,$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = -1 - 1 + 1 + 1 = 0\,,$$

y que además,

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 1+1-1-1 = 0\,, \quad \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 2+1-2-1 = 0\,,$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = -1+1+1-1 = 0\,.$$

(i.2).- Observar que $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = 1-1+1-1 = 0$. Luego, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ son ortogonales. Por lo tanto, la dimensión de $W^\perp$ es al menos 2.

Para encontrar una base ortonormal de W aplicamos Gram–Schmidt a los vectores

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{y} \quad w_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Como $||w_1|| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2 + 1^2} = 2$, de w_1 obtenemos

$$\widehat{w}_1 = \frac{w_1}{||w_1||} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

Siguiendo con el algoritmo de Gram–Schmidt, calculamos

$$\begin{aligned} w_2' = w_2 - \langle w_2, \widehat{w}_1 \rangle \widehat{w}_1 &= \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Luego, Como $||w_2'|| = \sqrt{(1/2)^2 + (1/2)^2 + (-1/2)^2 + (-1/2)^2} = 1$, de w_2' obtenemos

$$\widehat{w}_2 = \frac{w_2'}{||w_2||} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}.$$

Como la dimensión de $W^\perp$ es al menos 2 y $W \oplus W^\perp = \mathbb{R}^4$, se debe tener que la dimensión de W es a lo más 2. Luego, como $\{\widehat{w}_1, \widehat{w}_2\}$ son dos vectores unitarios ortogonales en W deben ser base de W. Sigue que una base ortonormal de W es

$$\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

En particular la dimensión de W es 2 y por lo tanto la dimensión de $W^\perp$ también es 2. Luego, como sabemos que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ son ortogonales, para obtener una base ortonormal de $W^\perp$ basta normalizar los anteriores vectores para que queden unitarios. Las normas de los mencionados vectores son $\sqrt{1^2 + 1 + 1^2 + 1^2} = 2$ y $\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2 + (-1)^2} = 2$ respectivamente. Sigue que, una base ortonormal de $W^\perp$ es

$$\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}.$$

<u>Observación 1</u>: De haber continuado aplicando el algoritmo de Gram–Schmidt a w_3 se hubiese obtenido que $\widehat{w}_3 = w_3' = 0$, y por lo tanto se hubiese llegado a la misma conclusión a expensas de tener que realizar más cálculos.

<u>Observación 2</u>: Con un poco de astucia uno puede evitar realizar Gram–Schmidt. En efecto, es fácil ver que el primer y tercer vector generador de W son ortogonales. Luego, una vez probado (i.1) uno tiene dos vectores en W y dos en $W^\perp$ que son ortogonales entre si. Basta normalizar estos vectores para obtener las bases encontradas más arriba.

(ii.1).- Para establecer que T es lineal bastará verificar que cualquiera sean $p, p' \in \mathcal{P}_5(x)$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $T(\alpha p + \beta p') = \alpha T(p) + \beta T(p')$. En efecto, si $p, p' \in \mathcal{P}_5(x)$

$$(T(\alpha p + \beta p'))(x) = (\alpha p + \beta p')(x^2) = \alpha p(x^2) + \beta p'(x^2) = \alpha(T(p))(x) + \beta(T(p'))(x).$$

Luego, $T(\alpha p + \beta p') = \alpha T(p) + \beta T(p')$.

(ii.2).- Veremos dos formas de abordar este problema.

- **Primera Forma**: Sea $p(x) = \sum_{i=0}^{5} p_i x^i \in \mathcal{P}_5(x)$ cualesquiera. Por definición de T se tiene que $(T(p))(x) = \sum_{i=0}^{5} p_i x^{2i}$. Luego, $T(p) \in \langle\{1, x^2, x^4, x^6, x^8, x^{10}\}\rangle$, i.e., $\mathbb{I}m(T) \subseteq$

$\langle\{1, x^2, x^4, x^6, x^8, x^{10}\}\rangle$. Por otro lado, si $q(x) = \sum_{i=0}^5 q_i x^{2i} \in \langle\{1, x^2, x^4, x^6, x^8, x^{10}\}\rangle$, entonces $T(\sum_{i=0}^5 q_i x^i) = q$, i.e., $\langle\{1, x^2, x^4, x^6, x^8, x^{10}\}\rangle \subseteq \mathbb{I}m(T)$. En resumen,

$$\mathbb{I}m(T) \;=\; \langle\{1, x^2, x^4, x^6, x^8, x^{10}\}\rangle\,.$$

Como además $\{1, x^2, x^4, x^6, x^8, x^{10}\}$ es un conjunto linealmente independiente, se tiene que es base de $\mathbb{I}m(T)$.

- **Segunda Forma**: Como $\{1, x, x^2, x^3, x^4, x^5\}$ es base del espacio de partida $\mathcal{P}_5(x)$ de T y una transformación lineal aplicada a una base de su espacio de partida entrega un generador de $\mathbb{I}m(T)$, se tiene que

$$\mathbb{I}m(T) \;=\; \langle\{T(1), T(x), T(x^2), T(x^3), T(x^4), T(x^5)\}\rangle \;=\; \langle\{1, x^2, x^4, x^6, x^8, x^{10}\}\rangle\,.$$

Como además $\{1, x^2, x^4, x^6, x^8, x^{10}\}$ es un conjunto linealmente independiente, se tiene que es base de $\mathbb{I}m(T)$.

(ii.3).- Por propiedad de las transformaciones lineales, para establecer la inyectividad de T bastará probar que $\mathbb{K}er(T) = \{0\}$. Como $\mathbb{K}er(T)$ es sub–espacio vectorial de $\mathcal{P}_5(x)$, contiene el neutro aditivo de $\mathcal{P}_5(x)$, i.e., $\{0\} \subseteq \mathbb{K}er(T)$. Basta entonces probar que $\mathbb{K}er(T) \subseteq \{0\}$. Veremos dos formas de lograr lo anterior.

- **Primera Forma**: Sea $p \in \mathcal{P}_5(x)$ tal que $p(x) = \sum_{i=0}^5 p_i x^i$ y $p \in \mathbb{K}er(T)$. Sigue que,

$$p(x^2) \;=\; \sum_{i=0}^{5} p_i x^{2i} \;=\; 0\,.$$

Luego, $p_0 = p_1 = \ldots = p_5 = 0 \in \mathbb{R}$, i.e., $p = 0 \in \mathcal{P}_5(x)$.

- **Segunda Forma**: Sea $p \in \mathcal{P}_5(x)$ tal que $p \in \mathbb{K}er(T)$. Sigue que $T(p)(x) = p(x^2) = 0$ cualquiera sea $x \in \mathbb{R}$, i.e., p tiene una infinidad de raíces por lo que $p = 0 \in \mathcal{P}_5(x)$.