MA-11A Álgebra **4 de Octubre, 2001**

Pauta Control 5

PROBLEMA 1:

(i).- Hay varias maneras de hacer esta parte.

- **Primera forma:** Identificando un vector $P \neq 0$ en Π y luego haciendo el producto cruz $P \times N$ obtenemos dos vectores ortogonales en Π. En particular generadores de Π. Normalizando se encuentra la base buscada.

  De la ecuación normal del plano, deducimos que la ecuación cartesiana de Π es $-2x+y+2z=0$. De aquí, $P=(1,0,-1)^t$ está en Π. Además,

$$P \times N = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

  Luego, $P/||P|| = (1,0,-1)^t/\sqrt{2}$ y $P \times D/||P \times D|| = (1,0,1)^t/\sqrt{2}$ es una base ortonormal de Π.

- **Segunda forma:** Determinamos dos vectores directores de Π. Dichos vectores generan Π, por lo que usando Gram-Schmidt se obtiene una base ortonormal de Π.

  De la ecuación normal del plano, deducimos que la ecuación cartesiana de Π es $-2x+y+2z=0$. De aquí, $y=2x-2z$. Luego,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

  Por lo que $D_1 = (1,2,0)^t$ y $D_2 = (0,-2,1)^t$ son vectores directores de Π.
  Aplicando Gram-Schmidt, definimos $D_1'' = D_1/||D_1|| = (1,2,0)^t/\sqrt{5}$ y

$$D_2' = D_2 - \langle D_2, D_1'' \rangle D_1'' = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{4}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5 \\ -2/5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

  Luego, si $D_2'' = D_2'/||D_2'|| = (4,-2,5)^t/3\sqrt{5}$, sigue que D_1'' y D_2'' forman una base ortonormal de Π.

Nota: Obviamente, hay muchas otras bases ortonormales de Π además de las que se exhiben más arriba.

(ii).- Observar que $\Pi^{\perp}$ es una recta que pasa por el origen y tiene vector director N. Como Π'

contiene a $\Pi^{\perp}$ tenemos que podemos tomar el origen como vector posición de Π' y a N como uno de sus vectores directores.

Como Π' además de contener el origen pasa por el punto P (que no es paralelo a N), tenemos que P sirve como segundo vector director de Π'.

Haciendo el producto cruz entre los vectores directores de Π' que hemos identificado, obtenemos un vector normal N' de Π', tal que

$$N' = N \times P = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Luego, la ecuación cartesiana de Π' viene dada por $-x+4y-3z = C$ para algún $C \in \mathbb{R}$. Recordando que Π' contiene al origen, sigue inmediatamente que $C = 0$ y que la ecuación cartesiana buscada es $-x + 4y - 3z = 0$.

(iii).- Hay dos rectas en el plano Π' que forman un ángulo de $45°/135°$ con N. Cada una de ellas determina un vector unitario con un ángulo de $45°$ con respecto a N.

Proyectamos el vector P sobre el plano Π y obtenemos el punto Q. Sigue que $N/||N|| + Q/||Q||$ y $N/||N|| - Q/||Q||$ normalizados son los dos vectores buscados.

El valor de Q lo podemos obtener usando la base ortonormal de Π de la parte anterior. De hecho,

$$Q = \langle P, D_1''\rangle D_1'' + \langle P, D_2''\rangle D_2'' = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Luego, $N/||N|| = (-2,1,2)^T/3$ y $Q/||Q|| = (-1,8,-5)^T/3\sqrt{10}$. Como $N/||N||$ y $Q/||Q||$ son vectores unitarios y ortogonales, la norma de su resta/suma es $\sqrt{2}$. Sigue que los vectores pedidos son

$$\frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \pm \frac{1}{6\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

(iv).- Veremos dos formas de abordar este problema

- **Primera forma:** Dado $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ definimos $\widehat{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix}$. Observar que $\langle N, X\rangle = 0$ si y sólo si $\langle \widehat{N}, \widehat{X}\rangle = 0$. Luego, por (i) y observando que $e_4 \in \widetilde{\Pi}$[1] es unitario y trivialmente ortogonal a $\widehat{D}_1''$ y $\widehat{D}_2''$, se tiene que $\widehat{D}_1''$ y $\widehat{D}_2''$ es un conjunto ortonormal de vectores en $\widetilde{\Pi}$. En particular $\mathrm{Dim}\, \widetilde{\Pi} \geq 3$.

  Como $\langle \widetilde{N}, \widetilde{N}\rangle \neq 0$, se tiene que $\widetilde{N} \notin \widetilde{\Pi}$. Por lo tanto, $\widetilde{\Pi} \neq \mathbb{R}^4$, por lo que $\mathrm{Dim}\, \widetilde{\Pi} < 4$. De lo

[1] Aquí, e_4 denota el cuarto vector de la base canónica de $\mathbb{R}^4$.

anterior, vemos que $\widetilde{\Pi}$ tiene dimensión 3, luego una base ortonormal de $\widetilde{\Pi}$ está dada por

$$\left\{\widehat{D}_1'', \widehat{D}_2'', e_4\right\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix}4\\-2\\5\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}.$$

También se concluye que $\widetilde{N} \in \widetilde{\Pi}^{\perp}$ y que $\widetilde{\Pi}^{\perp}$ tiene dimensión 1 (por ser suplementario en $\mathbb{R}^4$ de un espacio de dimensión 3). De aquí, que una base ortonormal de $\widetilde{\Pi}^{\perp}$ sea

$$\left\{\frac{N}{||\widetilde{N}||}\right\} = \left\{ \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\1\\2\\0\end{pmatrix} \right\}.$$

- **Segunda forma:** Primero determinamos una base de de $\widetilde{\Pi}$. Para ello observamos que $\widetilde{X} \in \widetilde{\Pi}$ si y sólo si $0 = \langle \widetilde{X}, \widetilde{N}\rangle = -2\widetilde{X}_1 + \widetilde{X}_2 + 2\widetilde{X}_3 + 0\widetilde{X}_4$. Por lo tanto, $\widetilde{X}_2 = 2\widetilde{X}_1 - 2\widetilde{X}_3$. Sigue que,

$$\widetilde{X} = \widetilde{X}_1\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix} + \widetilde{X}_3\begin{pmatrix}0\\-2\\1\\0\end{pmatrix} + \widetilde{X}_4\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Luego, un conjunto generador de $\widetilde{\Pi}$ es $\left\{(1,2,0,0)^T, (0,-2,1,0)^T, (0,0,0,1)^T\right\}$. Es fácil ver que este conjunto es linealmente independiente (por ejemplo, porque cada vector del conjunto tiene una de sus componentes no nula en una coordenada en que los otros vectores tienen componentes nulas). Por lo tanto, aplicando Gram-Schmidt, ortonormalizamos el referido conjunto y obtenemos la siguiente base ortonormal de $\widetilde{\Pi}$

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix}4\\-2\\5\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}.$$

Por otro lado, $\widetilde{N}$ claramente pertenece a $\widetilde{\Pi}^{\perp}$. Además, $\widetilde{\Pi}^{\perp}$ tiene dimensión $4 - \mathrm{Dim}\,\widetilde{\Pi} = 4 - 3 = 1$ (por ser suplementario en $\mathbb{R}^4$ de un espacio de dimensión 3). De aquí, que una base ortonormal de $\widetilde{\Pi}^{\perp}$ sea

$$\left\{\frac{N}{||\widetilde{N}||}\right\} = \left\{ \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\1\\2\\0\end{pmatrix} \right\}.$$

PROBLEMA 2:

(i.1).- Por contradicción. Sea $\{v_1, \ldots, v_m\}$ un conjunto casi independiente donde $m > n+1$. Luego, $\{v_1, \ldots, v_m\} \setminus \{v_j\}$ tiene $m-1 > n$ vectores linealmente independientes que pertenecen a V.

Lo anterior contradice el hecho que en un espacio de dimensión n no pueden haber más de n vectores linealmente independientes.

(i.2).- Cualquier conjunto de tres vectores no nulos, donde ningún par es colineal con el origen es un ejemplo válido. En particular, el siguiente conjunto es casi independiente en $\mathbb{R}^2$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(ii.1).- Veamos que $(U+W)^{\perp} \subseteq U^{\perp} \cap W^{\perp}$. Sea $v \in (U+W)^{\perp}$. Sigue que $\langle v, u+w \rangle = 0$ cualquiera sea $u \in U$ y $w \in W$. En particular si $w = 0$ obtenemos que $\langle v, u \rangle = 0$ cualquiera sean $u \in U$, y si $u = 0$ obtenemos que $\langle v, w \rangle = 0$ cualquiera sea $w \in W$. Luego, $v \in U^{\perp}$ y $v \in W^{\perp}$. Por lo tanto, $v \in U^{\perp} \cap W^{\perp}$.

Para probar la otra inclusión observamos que si $v \in U^{\perp} \cap W^{\perp}$, entonces $\langle v, u \rangle = \langle v, w \rangle = 0$ cualquiera sean $u \in U$ y $w \in W$. Luego, $\langle v, u+w \rangle = 0$ para todo $u \in U$ y $w \in W$, i.e., $v \in (U+W)^{\perp}$.

(ii.2).- Veremos dos formas de abordar este problema

- **Primera forma:** Por contradicción. Supongamos que $U + W = \mathbb{R}^n$. Luego, $(\mathbb{R}^n)^{\perp} = \{0\}$. De la parte anterior, sigue que $\{0\} = (U+W)^{\perp} = U^{\perp} \cap W^{\perp}$. Contradicción.
- **Segunda forma:** Por la parte anterior, si $U^{\perp} \cap W^{\perp} \neq \{0\}$, entonces $\mathrm{Dim}\,(U+W)^{\perp} = \mathrm{Dim}\,(U^{\perp} \cap W^{\perp}) > 0$.

  Por resultado conocido, $(U+W)^{\perp}$ y $(U+W)$ son suplementarios, luego $\mathrm{Dim}\,(U+W)^{\perp} + \mathrm{Dim}\,(U+W) = n$. Sigue que $\mathrm{Dim}\,(U+W) < n$, luego $(U+W) \neq \mathbb{R}^n$.

PROBLEMA 3:

(i).- Veamos primero que U es sub–espacio vectorial de $M_{n,n}(\mathbb{R})$. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $A, B \in U$. Sea además, $C = \alpha A + \beta B$. Queremos verificar que $C \in U$. En efecto, como $A, B \in U$,

$$c_{i,j} = \alpha a_{i,j} + \beta b_{i,j} = \alpha a_{n+1-i,n+1-j} + \beta b_{n+1-i,n+1-j} = c_{n+1-i,n+1-j}.$$

Luego, $C \in U$ como se quería comprobar.

Análogamente, para ver que W es sub–espacio vectorial de $M_{n,n}(\mathbb{R})$, tomamos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $A, B \in W$. Si además, definimos $C = \alpha A + \beta B$, tenemos que $A, B \in W$ implican que

$$c_{i,j} = \alpha a_{i,j} + \beta b_{i,j} = -\alpha a_{n+1-i,n+1-j} - \beta b_{n+1-i,n+1-j} = -c_{n+1-i,n+1-j}.$$

Luego, $C \in W$ como se quería comprobar.

(ii).- Para ver que $B \in W$, debemos comprobar que $b_{i,j} = -b_{n+1-i,n+1-j}$. En efecto, sean i y j cualesquiera,

$$b_{i,j} = \frac{1}{2}(a_{i,j} - a_{n+1-i,n+1-j}) = -\frac{1}{2}(a_{n+1-i,n+1-j} - a_{i,j}).$$

El resultado deseado sigue de observar que $i = n+1-(n+1-i)$ y que $j = n+1-(n+1-j)$, por lo que $b_{i,j} = b_{n+1-i,n+1-j}$.

Veamos ahora que $U \oplus W = M_{n,n}(\mathbb{R})$. Sea $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ cualquiera. Sea B como definida en el enunciado. Observar que

$$A = C + B\,, \qquad \text{si } C = A - B\,.$$

Pero, $c_{i,j} = a_{i,j} - \frac{1}{2}(a_{i,j} - a_{n+1-i,n+1-j}) = \frac{1}{2}(a_{i,j} + a_{n+1-i,n+1-j}) = \frac{1}{2}(a_{n+1-i,n+1-j} + a_{i,j}) = c_{n+1-i,n+1-j}$, donde esta última igualdad nuevamente se tiene por definición de C y dado que $i = n+1-(n+1-i)$ y $j = n+1-(n+1-j)$. Luego, $C \in U$. Sigue que todo $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ se puede escribir como suma de una matriz en U y otra en W, i.e., $M_{n,n}(\mathbb{R}) \subseteq U + W$. Como la otra inclusión es obvia, se tiene la igualdad.

Para concluir que $U \oplus W = \mathbb{R}^n$ basta con verificar que $U \cap W = \{0\}$. En efecto, si $A \in U \cap W$, entonces

$$a_{i,j} = -a_{n+1-i,n+1-j} = -a_{i,j}\,,$$

donde la primera igualdad se tiene porque $A \in W$ y la segunda porque $A \in U$. Por lo tanto, $a_{i,j} = 0$, y como esto se cumple para i y j cualesquiera, se comprueba que $A = 0$.

(iii).- Si $A \in U \subseteq M_{3,3}(\mathbb{R})$, entonces

$$\begin{array}{lll} a_{1,1} = a_{3,3}\,, & a_{1,2} = a_{3,2}\,, & a_{1,3} = a_{3,1}\,, \\ a_{2,1} = a_{2,3}\,, & a_{2,2} = a_{2,2}\,, & a_{2,3} = a_{2,1}\,, \\ a_{3,1} = a_{1,3}\,, & a_{3,2} = a_{1,2}\,, & a_{3,3} = a_{1,1}\,. \end{array}$$

Luego, la matriz A es igual a

$$a_{1,1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + a_{1,2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{1,3}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{2,1}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{2,2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En particular, U está generado por

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Tomando la combinación lineal de las matrices recién indicadas

$$\alpha\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \phi\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \theta\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e igualando a la matriz nula de $M_{3,3}(\mathbb{R})$ se obtiene que

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \theta & \phi & \theta \\ \gamma & \beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se deduce fácilmente que el referido conjunto de matrices es linealmente independientes y por lo tanto base de U.

Sigue que U es de dimensión 5. Como W es suplementario de U, tenemos que $\operatorname{Dim} W + \operatorname{Dim} U = 9$, de donde se concluye que $\operatorname{Dim} W = 4$.