Fecha: 17 de octubre del 2002
Tiempo: 3 horas

## Pauta Control 5 MA-11A Álgebra

1. (a) i. Encontremos primero los parámetros $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ que satisfacen:

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}$$

Sigue que

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha & +\beta & +\gamma & +\delta & = & a_1 \\ \alpha & & -2\gamma & +\delta & = & a_2 \\ & +\beta & +\gamma & & = & a_3 \\ & & +\gamma & -\delta & = & a_4 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha & +\beta & +\gamma & +\delta & = & a_1 \\ & +\beta & +3\gamma & & = & a_1 - a_2 \\ & +\beta & +\gamma & & = & a_3 \\ & & +\gamma & -\delta & = & a_4 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha & +\beta & +\gamma & +\delta & = & a_1 \\ & +\beta & +3\gamma & & = & a_1 - a_2 \\ & & +2\gamma & & = & a_1 - a_2 - a_3 \\ & & +\gamma & -\delta & = & a_4 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha & +\beta & +\gamma & +\delta & = & a_1 \\ & +\beta & +3\gamma & & = & a_1 - a_2 \\ & & +2\gamma & & = & a_1 - a_2 - a_3 \\ & & & 2\delta & = & a_1 - a_2 - a_3 - 2a_4 \end{array}$$

Se tiene entonces:

$$\begin{array}{ccc} \alpha & = & \frac{a_1+a_2-a_3+2a_4}{2} \\ \beta & = & \frac{-a_1+a_2+3a_3}{2} \\ \gamma & = & \frac{a_1-a_2-a_3}{2} \\ \delta & = & \frac{a_1-a_2-a_3-2a_4}{2} \end{array}$$

`[0/1 pto]`

Luego:

$$\begin{aligned}
T\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} &= \alpha T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma T\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \delta T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Es decir:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + 2\beta + \gamma + \delta \\ \beta + \delta \\ \alpha + 2\beta \\ -\beta + \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a_1+a_2+3a_3}{2} \\ a_3 - a_4 \\ \frac{-a_1+3a_2+5a_3+2a_4}{2} \\ a_1 - a_2 - 2a_3 \end{pmatrix}$$

`[0/1 pto]`

ii. $T\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = 0$ si y solamente si

$$\begin{array}{rrrrcl}
a_1 & +a_2 & +3a_3 & & = & 0 \\
 & & a_3 & -a_4 & = & 0 \\
-a_1 & +3a_2 & +5a_3 & +2a_4 & = & 0 \\
a_1 & -a_2 & -2a_3 & & = & 0
\end{array}$$

Al escalonar resulta:

$$\begin{array}{rrrrcl}
a_1 & +a_2 & +3a_3 & & = & 0 \\
 & 4a_2 & +8a_3 & +2a_4 & = & 0 \\
 & & -2a_3 & +2a_4 & = & 0
\end{array}$$

Luego:

- $a_4 = \alpha$
- $a_3 = \alpha$
- $a_2 = -\frac{5}{2}\alpha$
- $a_1 = -\frac{1}{2}\alpha$

Una base del $Ker(T)$ es $\left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

`[0/1 pto]`

iii. Hay que extraer un conjunto l.i de

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\2\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

Matricialmente:

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 1\\0 & 1 & 0 & 1\\1 & 2 & 0 & 0\\0 & -1 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

Escalonando obtenemos:

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 1\\0 & 1 & 0 & 1\\0 & 0 & 1 & 2\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Luego, una base para $Im(T)$ es

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\2\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

`[0/1 pto]`

(b)

- Como, por el TNI, $dim(Ker(T)+Im(T)) = dim(V)$, se tiene que $Ker(T)+Im(T) = V$.

  `[0/0.5 pto]`

- Supongamos que $x \in Ker(T) \cap Im(T)$. Como $x \in Im(T)$, para un cierto $y \in V$, $T(a) = x$. Como $x \in Ker(T)$, $T(x) = 0$. Luego $0 = T(x) = T(T(a)) = T(a)$. O sea, $T(a) = 0$. Se concluye que $x = 0$ pues $T(a) = x$.

  `[0/1 pto]`

2. (a) i. Vamos a aplicar Gramn-Schmidt al siguiente conjunto:

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$w_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{w_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$w_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \tilde{w_3} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{-1}{4} \\ \frac{-1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$w_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \tilde{w_4} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ &\quad - \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$w_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se tiene que

$$W = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

$$W^{\perp} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

[0/1.5 ptos]

ii. Encontremos primero los parámetros $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ que satisfacen:

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Sigue que

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha & +\beta & +\gamma & & = & x_1 \\ \alpha & & -\gamma & +\delta & = & x_2 \\ \alpha & & -\gamma & -\delta & = & x_3 \\ \alpha & -\beta & +\gamma & & = & x_4 \end{array}$$

Se tiene entonces:

$$\begin{array}{ccc} \alpha & = & \frac{x_1+2x_3+x_4}{4} \\ \beta & = & \frac{x_1-x_4}{2} \\ \gamma & = & \frac{x_1-2x_3+x_4}{4} \\ \delta & = & x_2-x_3 \end{array}$$

[0/0.5 pto]

Luego:

$$\begin{aligned} T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} &= \alpha T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \gamma T \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \delta T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Es decir:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ -\gamma + \delta \\ -\gamma - \delta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_1 - 2x_3 + x_4}{4} \\ \frac{-x_1 + 4x_2 - 2x_3 - x_4}{4} \\ \frac{-x_1 - 4x_2 + 6x_3 - x_4}{4} \\ 0 \end{pmatrix}$$

`[0/1 pto]`

(b) i. 
- Sea $x \in (U+V)^{\perp}$. Debemos probar que $x \in U^{\perp}$ y que $x \in V^{\perp}$. En efecto: para cualquier $u \in U$, $< x, u >=< x, u + 0 >= 0$ pues $x \in (U+V)^{\perp}$; para cualquier $v \in V$, $< x, v >=< x, 0 + v >= 0$ pues $x \in (U+V)^{\perp}$.
- Sea $x$ tal que $x \in U^{\perp}$ y $x \in V^{\perp}$. Debemos probar que $x \in (U+V)^{\perp}$. En efecto: para cualquier $u \in U, v \in V$ se tiene $< x, u + v >=< x, u > + < x, v >= 0 + 0 = 0$

`[0/0.5 ptos]`

ii. 
- Sea $x \in (U^{\perp})^{\perp}$. Como $\mathbb{R}^n = U \oplus U^{\perp}$, $x = x_U + x_{U^{\perp}}$ con $x_U \in U$ y $x_{U^{\perp}} \in U^{\perp}$. Se tiene $< x, x_{U^{\perp}} >= 0$. Luego $< x_U, x_{U^{\perp}} > + < x_{U^{\perp}}, x_{U^{\perp}} >= 0$. Como $< x_U, x_{U^{\perp}} >= 0$ se tiene que $< x_{U^{\perp}}, x_{U^{\perp}} >= 0$. De aquí se concluye que $x_{U^{\perp}} = 0$ y luego $x = x_U \in U$.
- Sea $x \in U$. Para todo $z \in U^{\perp}$, $< x, z >= 0$. Luego, $x \in (U^{\perp})^{\perp}$.

`[0/0.5 ptos]`

iii. Por (i), $(U^{\perp} + V^{\perp})^{\perp} = ((U^{\perp})^{\perp} \cap (V^{\perp})^{\perp})$. Aplicando (ii), se tiene $(U^{\perp} + V^{\perp}) = (U \cap V)^{\perp}$.

`[0/0.5 ptos]`

iv. Supongamos que $\mathbb{R}^n = U \oplus V$. Como $(U+V)^{\perp} = \phi$, se tiene que $U^{\perp} \cap V^{\perp} = \phi$. Como $(U \cap V)^{\perp} = \mathbb{R}^n$, se tiene que $U^{\perp} + V^{\perp} = \mathbb{R}^n$. Se concluye que $\mathbb{R}^n = U^{\perp} \oplus V^{\perp}$. La demostración en el otro sentido es simétrica.

`[0/1.5 ptos]`

3. (a) Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Sean $P, Q \in W_1$. Sigue que

$$(\alpha P + \beta Q)_{11} + (\alpha P + \beta Q)_{12} + (\alpha P + \beta Q)_{21} + (\alpha P + \beta Q)_{22}$$
$$=$$

$$\alpha(P_{11}+P_{12}+P_{21}+P_{22})+\beta(P_{11}+P_{12}+P_{21}+P_{22})$$
$$=$$
$$0$$

Luego, $(\alpha P+\beta Q)\in W_1$

`[0/1 pto]`

(b) Sean $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Sean $P,Q\in W_2$. Sigue que

$$\begin{aligned}(\alpha P+\beta Q)_{11}+(\alpha P+\beta Q)_{22} &= \alpha(P_{11}+P_{22})+\beta(P_{11}+P_{22})\\ &= 0\end{aligned}$$

Luego, $(\alpha P+\beta Q)\in W_2$

`[0/1 pto]`

(c) $A\in W_1$ si y solamente si $A=\begin{bmatrix} a & b\\ c & (-a-b-c)\end{bmatrix}$

Es decir:

$$A=a\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

Luego:

$$W_1=\left\langle\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix}\right\}\right\rangle$$

`[0/0.5 ptos]`

Falta demostrar que el conjunto de las tres matrices es l.i. En efecto: si

$$\alpha\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}+\gamma\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix}=0$$

entonces

$$\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & -\alpha-\beta-\gamma\end{bmatrix}=0$$

Se concluye que $\alpha=\beta=\gamma=0$ y, por lo tanto, la dimensión de $W_1$ es 3.

`[0/0.5 ptos]`

(d) $A \in W_2$ si y solamente si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$

Es decir:

$$A = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Luego:

$$W_2 = \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle$$

`[0/0.5 ptos]`

Falta demostrar que el conjunto de las tres matrices es l.i. En efecto: si

$$\alpha\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \gamma\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

entonces

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{bmatrix} = 0$$

Se concluye que $\alpha = \beta = \gamma = 0$ y, por lo tanto, la dimensión de $W_2$ es 3.

`[0/0.5 ptos]`

(e) $A \in W_1 \cap W_2$ si y solamente si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & -a \end{bmatrix}$

Es decir:

$$A = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Luego:

$$W_1 \cap W_2 = \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle$$

`[0/0.5 ptos]`

Falta demostrar que el conjunto de las dos matrices es l.i. En efecto: si

$$\alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

entonces

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & -\alpha \end{bmatrix} = 0$$

Se concluye que $\alpha = \beta = 0$ y, por lo tanto, la dimensión de $W_1 \cap W_2$ es 2.

[0/0.5 ptos]

(f) $dim(W_1 + W_2) = dim(W_1) + dim(W_2) - dim(W_1 \cap W_2) = 3 + 3 - 2 = 4.$

[0/1 pto]