PAUTA CONTROL 5
ALGEBRA MA11A

2 DE OCTUBRE, 2003

Tiempo : 3 horas

Problema 1:

Sea $V = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, el espacio vectorial de las matrices de 2×2, con coefcientes reales, con las operaciones usuales de suma de matrices y producto de una matriz por un escalar. Sean

$$W_1 = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \ : a + b = 0 \right\}$$

y

$$W_2 = \left\{ A = \begin{pmatrix} x & y \\ -x & z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \quad x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

(1) Demuestre que W_1 y W_2 son subespacios vectoriales de V.

(1.5 ptos.)

(2) Encuentre una base de W_1 y W_2, indicando las respectivas dimensiones de cada subespacio.

(2 ptos.)

(3) Encuentre una base y la dimensión de $W_1 \cap W_2$.

(1.5 ptos.)

(4) Complete una base de W_1 para obtener una base de V. Justifique su respuesta.

(1 pto.)

Solución:

(1) Veamos en primer lugar que W_1 es un subespacio vectorial de V. En efecto, basta probar que dados $A, B \in W_1$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces la matriz $(\alpha A + \beta B) \in W_1$.

Sean $A, B \in W_1$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, luego

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad A = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$$

tales que

$$(a_1 + b_1 = 0) \qquad \text{y} \qquad (a_2 + b_2 = 0),$$

(0,75)

luego

$$\alpha A + \beta B = \alpha \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_1 + \beta a_2 & \alpha b_1 + \beta b_2 \\ \alpha c_1 + \beta c_2 & \alpha d_1 + \beta d_2 \end{pmatrix}$$

y se tiene que

$$(\alpha a_1 + \beta a_2) + (\alpha b_1 + \beta b_2) = \alpha(a_1 + b_1) + \beta(a_2 + b_2) = 0 + 0 = 0,$$

lo que prueba que $\alpha A + \beta B \in W_1$ y así W_1 es un subespacio vectorial de V.

Veamos ahora que W_2 es un subespacio vectorial de V, luego si $A \in W_2$, entonces

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ -x & z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x, y, z \in \mathbb{R},$$

lo que muestra que W_2 es el subespacio generado por los vectores

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$ (0,75)

lo que muestra que W_2 es un subespacio vectorial de V.

(2) En primer lugar buscaremos una base de W_1. Sea $A \in W_1$, luego

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \text{verificando } a + b = 0,$$

$$A = \begin{pmatrix} a & -a \\ c & d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

lo que muestra que

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$ (0,4)

es un generador de W_1, nos resta ver que es l.i. En efecto, sean $a, c, d \in \mathbb{R}$ tales que

$$A = \begin{pmatrix} a & -a \\ c & d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$ (0,3)

entonces es claro que $a = c = d$, lo que muestra que el conjunto B_1 es l.i. y por lo tanto es una base de W_1 y además $\dim(W_1) = 3$. (0,3)

Por otra parte, de (1) tenemos que

$$B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(0,4)

es un generador de W_2, por lo que nos resta probar que el conjunto es l.i. Sean x, y, z tales que

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ -x & z \end{pmatrix}$$

lo que muestra que

(0,3) $$x = y = z = 0,$$

y así el conjunto es l.i. y por lo tanto una base de W_2 y además se tiene que $\dim(W_2) = 3$.

(0,3)

(3) Veamos en primer lugar una caracterización para el espacio intersección, luego sea

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in W_1 \cap W_2,$$

$$a + b = 0 \qquad \text{y} \qquad a + c = 0,$$

por lo tanto

$$A = \begin{pmatrix} a & -a \\ -a & d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

lo que muestra que $W_1 \cap W_2$ es generado por el conjunto de las matrices

$$\hat{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$ (0,5)

y además podemos ver que si

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -a \\ -a & d \end{pmatrix}$$

entonces

$$a = d = 0, \quad (0{,}5)$$

lo que implica que el conjunto es l.i. y además que $\hat{B}$ es una base de $W_1 \cap W_2$, por lo tanto

$$\dim(W_1 \cap W_2) = 2. \quad (0{,}5)$$

(4) Recordemos que una base de W_1 es

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

la cual tiene tres elementos, luego si agregamos un elemento A_4 a esta base, de manera que el nuevo conjunto se l.i., entonces el espacio generado por este conjunto tendrá dimesnsión cuatro, la cual es la dimensión del espacio $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, lo que probaria que

$$\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) = \langle B_1 \cup \{A_4\} \rangle$$

es una base de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Por lo anterior, nos basta encontrar cualquier elemento de manera que el nuevo conjunto sea , por ejemplo sea

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

entonces veamos que el conjunto

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

es l.i., en efecto, sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, tales que

$$a\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

luego

$$\begin{pmatrix} a & d-a \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow a = b = c = d = 0, \quad (1{,}0)$$

lo que prueba que B es l.i y por lo tanto una base de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$

Problema 2:

(1) Sean $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ tres puntos no colineales **(es decir, no existe una recta que contenga a los tres puntos)**.

Sea π elplano que contiene a los puntos $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ y $\mathbf{r}$. Pruebe que

$$x \in \pi \iff \exists\, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \text{ tales que } \alpha + \beta + \gamma = 1 \text{ y } \mathbf{x} = \alpha\mathbf{p} + \beta\mathbf{q} + \gamma\mathbf{r}.$$

(3 ptos.)

(2) Considere las rectas

$$L_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R} \right.$$

y

$$L_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ : \ s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Pruebe que el plano que contiene a L_1 y L_2 tiene por ecuación cartesiana

$$x + y - z = 1.$$

(3 ptos.)

Solución:

(1) Veamos la doble implicación:

($\Longrightarrow$) Sea x un elemento del plano π, luego como $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ y $\mathbf{r}$ son puntos no colineales, entonces los vectores

$$\mathbf{d}_1 = \vec{pq} = \mathbf{q} - \mathbf{p} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{d}_2 = \vec{pr} = \mathbf{r} - \mathbf{p},$$

son vectores no paralelos y corresponden a dos vectores directores del plano, luego la ecuación vectorial del plano es

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{d}_1 + s\mathbf{d}_2, \qquad t, s \in \mathbb{R},$$

es decir,

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + t(\mathbf{q} - \mathbf{p}) + s(\mathbf{r} - \mathbf{p}) = (1 - t - s)\mathbf{p} + t\mathbf{q} + s\mathbf{r},$$

luego basta considerar

$$\alpha = 1 - t - s, \quad \beta = t, \quad \gamma = s,$$

entonces

$$\alpha + \beta + \gamma = 1 - t - s + t + s =$$

y además

$$\mathbf{x} = \alpha\mathbf{p} + \beta\mathbf{q} + \gamma\mathbf{r}, \qquad (1,5)$$

lo que completa la implicación.

($\Longleftarrow$) Supongamos ahora que existen $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, tales que $\alpha + \beta + \gamma = 1$ y además

$$\mathbf{x} = \alpha\mathbf{p} + \beta\mathbf{q} + \gamma\mathbf{r},$$

por demostrar que $\mathbf{x} \in \pi$.

En efecto, como $\alpha + \beta + \gamma = 1$, entonces $\alpha = 1 - \beta - \gamma$, así tenemos que

$$\mathbf{x} = (1 - \beta - \gamma)\mathbf{p} + \beta\mathbf{q} + \gamma\mathbf{r} = \mathbf{p} + \beta(\mathbf{q} - \mathbf{p}) + \gamma(\mathbf{r} - \mathbf{p}) = \mathbf{p} + \beta\mathbf{d}_1 + \gamma\mathbf{d}_2$$

y como $\mathbf{d}_1$ y $\mathbf{d}_2$ son vectores directores del plano, se concluye que $\mathbf{x} \in \pi$, lo que completa la demostración.

(1,5)

(2) Veamos la ecuación del plano que contiene a las rectas L_1 y L_2. Notemos que los puntos

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

pertenecen al plano, luego el vector

$$\mathbf{d}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

es un vector director del plano y además como las rectas están contenidas en el plano, el vector

$$\mathbf{d}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

también es un vector director del plano que no es paralelo a $\mathbf{d}_1$.

primera forma: Por lo tanto las ecuaciónes paramétricas del plano son

$$\begin{aligned} x &= 1+s \\ y &= 1+t \\ z &= 1+t+s \end{aligned}$$

de donde tenemos que

$$s = x-1 \quad \text{y} \quad t = y-1$$

de donde tenemos que la ecaución cartesiana del plano es

(3,0)

$$z = 1+t+s = 1+y-1+x-1 = x+y-1 \Longrightarrow x+y-z = 1.$$

segunda forma: Dado que $\mathbf{d}_1$ y $\mathbf{d}_2$ son vectores directores del [plano, entonces un vector normal al plano es

$$\mathbf{N} = \mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2 = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{\mathbf{k}} \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \hat{\imath} + \hat{\jmath} - \hat{\mathbf{k}},$$

así la ecuación cartesiana del plano es

$$(x-1, y-1, z-1) \cdot (1,1,-1) = 0 \Longleftrightarrow (x-1)+(y-1)-(z-1) = 0 \Longleftrightarrow x+y-z = 1,$$

lo que completa la demostración.

(3,0)

Problema 3: Sean U y W dos espacios vectoriales sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, de bases

$$B_U = \{u_1, \ldots, u_n\}$$

y

$$B_W = \{w_1, \quad , w_m\},$$

respectivamente.

(1) Pruebe que

$$U \times W = \{(u, w) \ : \ u \in U, \ w \in W\}$$

es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, con las operaciones

$$(u_1, w_1) + (u_2, w_2) = (u_1 + u_2, w_1 + w_2),$$

y

$$\lambda \cdot (u_1, w_1) = (\lambda u_1, \lambda w_1).$$

(2 ptos.)

(2) Pruebe que

$$U \times W = \{(u, w) \ : \ u \in U, \ w \in W\}$$

tiene como base al conjunto

$$B_{U\times W} = \{(u_1, 0), \quad , (u_n, 0), (0, w_1), \quad , (0, w_m)\}.$$

(2 ptos.)

(3) Consideremos $U = W = V$, con V un espacio vectorial de dimesión n, de base $\{v_1, \quad , v_n\}$. Encuentre una base y la dimesión de

$$Z = \{(v, -v) \in V \times V \ : \ v \in V\}$$

(2 ptos.)

Solución: ① Probar que $(U\times W, +)$ es grupo Abeliano $(0,7)$ $\wedge$ $\cdot$ es distributiva $(0,3)$

(1) Veamos que $U \times W$ es un espacio vectorial. Sean $(u_1, w_1), (u_2, w_2)$ in $U \times W$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, luego

$$\alpha(u_1, w_1) + \beta(u_2, w_2) = (\alpha u_1 + \beta u_2, \alpha w_1 + \beta w_2) \in U \times W,$$

ya que como U y W son espacios vectoriales, se tiene que

$$\alpha u_1 + \beta u_2 \in U \qquad \text{y} \qquad \alpha w_1 + \beta w_2 \in W,$$

lo que muestra que $U \times W$ es un espacio vectorial. $(1,0)$

(2) Para ver que el conjunto $B_{U\times W}$ es una base de $U \times W$ debemos probar que el genera al espacio y que es l.i.

Sean $u \in U$ y $w \in W$, entonces existen escalares $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{K}$ tales que

$$u = a_1 u_1 + \ldots + a_n u_n$$

y

$$w = b_1 w_1 + \ldots + b_m w_m$$

luego

$$\begin{aligned}
(u, w) &= (a_1 u_1 + \quad + a_n u_n, b_1 w_1 + \quad + b_m w_m) \\
&= (a_1 u_1 + \quad + a_n u_n, 0) + (0, b_1 w_1 + \quad + b_m w_m) \\
&= (a_1 u_1, 0) + \quad + (a_n u_n, 0) + (0, b_1 w_1) + \quad + (0, b_m w_m) \\
&= a_1(u_1, 0) + \ldots + a_n(u_n, 0) + b_1(0, w_1) + \quad + b_m(0, w_m),
\end{aligned}$$

lo que muestra que $B_{U\times W}$ genera a $U \times W$. $(1,0)$

Veamos además que es l.i. En efecto, sean $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots b_m \in \mathbb{K}$ tales que

$$\begin{aligned}(u,w) &= (a_1u_1 + \ldots + a_nu_n, b_1w_1 + \ldots + b_mw_m)\\ &= (a_1u_1, 0) + \ldots + (a_nu_n, 0) + (0, b_1w_1) + \ldots + (0, b_mw_m)\\ &= a_1(u_1,0) + \ldots + a_n(u_n,0) + b_1(0,w_1) + \ldots + b_m(0,w_m) = (0,0),\end{aligned}$$

así se tiene que

$$(a_1u_1 + \ldots + a_nu_n, b_1w_1 + \ldots + b_mw_m) = (0,0),$$

y por lo tanto

$$a_1u_1 + \ldots + a_nu_n = 0 \qquad \text{y} \qquad b_1w_1 + \ldots + b_mw_m = 0,$$

pero como los conjuntos B_U y B_W son l.i., entonces se tiene que

$$a_1 = \ldots = a_n = b_1 = \ldots = b_m = 0 \in \mathbb{K}$$

(1,0)

lo que prueba que $B_{U\times W}$ es una base de $U \times W$.

(3) Dado que V es un espacio vectorial de dimensión finita y sea una base

$$B = \{v_1, \ldots, v_n\},$$

del espacio V. Luego sea $z \in Z$, así

$$z = (v, -v), \qquad v \in V,$$

por lo tanto existen escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tales que

$$v = \alpha_1v_1 + \ldots + \alpha_nv_n,$$

luego

$$\begin{aligned}z = (v,-v) = &\ (\alpha_1v_1 + \ldots + \alpha_nv_n, -\alpha_1v_1 - \ldots - \alpha_nv_n)\\ &= \alpha_1(v_1, -v_1) + \ldots + \alpha_n(v_n, -v_n),\end{aligned}$$

lo que muestra que el conjunto

$$B_1 = \{(v_1, -v_1), \ldots, (v_n, -v_n)\}$$

(0,4)

genera a Z. Veamos que B_1 es l.i.

Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tales que

$$\alpha_1(v_1, -v_1) + \ldots + \alpha_n(v_n, -v_n) = (0,0),$$

es decir

$$(\alpha_1v_1 + \ldots + \alpha_nv_n, -\alpha_1v_1 - \ldots - \alpha_nv_n) = (0,0),$$

lo que implica que

$$\alpha_1v_1 + \ldots + \alpha_nv_n = 0,$$

(0,3)

y dado que el conjunto $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es l.i., así se tiene que $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$, lo que muestra que es una base de Z y además $\dim(Z) = n$.

(0,3)