# Pauta Control 5 MA11A Algebra
## Octubre 1996

**P.1.-**

a) La ecuación normal del plano $\Pi_0$ es de la forma $\Pi_0 : (\vec{x} - \vec{x}_0) \cdot \vec{n} = 0$ donde $\vec{n}$ es algún vector ortogonal al plano y $\vec{x}_0$ es algún punto por donde el plano pasa. En este caso $\vec{n} = (0,1,1) \times (1,0,2) = (2,1,-1)$. y $\vec{x}_0 = (0,0,0)$ Luego la ecuación pedida es: $\Pi_0 : \vec{x} \cdot (2,1,-1) = 0$.

b) El plano $\Pi$ que pasa por el punto $P(1,1,1)$ y no corta a $\Pi_0$ debe ser paralelo a $\Pi_0$, luego perpendicular a $(2,1,-1)$. Su ecuación normal es $\Pi : \vec{x} \cdot (2,1,-1) = (1,1,1) \cdot (2,1,-1) = 2$, luego su ecuación cartesiana es $2x + y - z = 2$.

c) La proyección de $P$ sobre $\Pi_0$ es el punto $P'$ de $\Pi_0$ tal que $\overrightarrow{PP'} = P' - P$ es perpendicular a $\Pi_0$, o sea paralelo a $(2,1,-1)$. Es decir si $P'(x,y,z)$ entonces $(x,y,z) = (1,1,1) + \lambda(2,1,-1)$ donde $\lambda$ es tal que $(x,y,x) \cdot (2,1,-1) = 0$, es decir $\lambda = -1/3$, con lo cual queda: $(x,y,z) = (1/3, 2/3, 4/3)$ Tambien puede recordarse que en clases se vio la fórmula $P' = P - \frac{(P-\vec{x}_0)\cdot\vec{n}}{\vec{n}\cdot\vec{n}}\vec{n}$ de donde se deduce que $P' = (1/3, 2/3, 4/3)$.

d) La distancia entre $\Pi$ y $\Pi_0$ es igual a la norma del vector $\overrightarrow{PP'}$ calculado en (c), es decir: $d(\Pi, \Pi_0) = \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}/3 = \sqrt{6}/3$ También puede recordarse que en clases se vio la fórmula $d(P, \Pi_0) = \frac{|ax_P + by_P + cz_P + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ de donde se obtiene $d(\Pi, \Pi_0) = d(P, \Pi_0) = \sqrt{6}/3$.

e) Los vectores $\vec{v}_1 = (0,1,1)$ y $\vec{v}_2 = (1,0,2)$ forman una base de $\Pi_0$ que no es ortonormal. Comenzamos por normalizar $\vec{v}_1$. Obtenemos $\vec{e}_1 = (0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. Calculamos $\vec{E}_2$ ortogonal a $\vec{e}_1$ mediante la fórmula

$$\vec{E}_2 = \vec{e}_1 - \frac{\vec{v}_2}{\vec{e}_1 \cdot \vec{v}_2} = (-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2).$$

Finalmente normalizamos $\vec{E}_2$ para obtener $\vec{e}_2 = (-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3, -\sqrt{3}/3)$

**P.2.-**

a) Para probar que $E \times E$, con las operaciones anteriores, es un espacio vectorial sobre $K$ verificamos todas las propiedades que definen a un espacio vectorial.

i) (Asociatividad)

$$\begin{aligned}
(u,v) + \{(u',v') + (u'',v'')\} &= (u,v) + \{(u'+u'', v'+v'')\} \\
&= (u + (u'+u''), v + (v'+v'')) \\
&= ((u+u') + u'', (v+v') + v'') \\
&= \{(u+u', v+v')\} + (u'', v'') \\
&= \{(u,v) + (u',v')\} + (u'', v'')
\end{aligned}$$

ii) (Conmutatividad)

$$\begin{aligned}(u,v)+(u',v') &= (u+u',v+v')\\ &= (u'+u,v'+v)\\ &= (u',v')+(u,v)\end{aligned}$$

iii) (Existencia del Elemento neutro) Es claro que $(u,v)+(0,0)=(u+0,v+0)=(u,v)$ luego $(0,0)$ es el elemento neutro.

iv) (Existencia del inverso de cada vector $(u,v)$) Es claro que $(u,v)+(-u,-v)=(u+-u,v+-v)=(0,0)$ luego $(-u,-v)$ es el elemento inverso del vector $(u,v)$.

v) $(1\cdot(u,v)=(u,v)\ \forall(u,v)\in E\times E)$ En efecto, $1\cdot(u,v)=(1u,1v)=(u,v)$.

vi) $(\alpha\cdot[\beta\cdot(u,v)]=[\alpha\beta]\cdot(u,v)\ \forall(u,v)\in E\times E)$ En efecto, $\alpha\cdot[\beta\cdot(u,v)]=\alpha\cdot(\beta u,\beta v)=(\alpha\beta u,\alpha\beta v)=(\alpha\beta)\cdot(u,v)$.

vii) (Distributividad de $\cdot$ c/r a la suma del cuerpo)

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)\cdot(u,v) &= \Big((\alpha+\beta)u,(\alpha+\beta)v\Big)\\ &= (\alpha u+\beta u,\alpha v+\beta v)\\ &= (\alpha u,\alpha v)+(\beta u,\beta v)\\ &= \alpha\cdot(u,v)+\beta\cdot(u,v)\end{aligned}$$

viii) (Distributividad de $\cdot$ c/r a la suma en $E\times E$)

$$\begin{aligned}\alpha\cdot[(u,v)+(u',v')] &= \alpha\cdot(u+u',v+v')\\ &= \Big(\alpha[u+u'],\alpha[v+v']\Big)\\ &= (\alpha u+\alpha u',\alpha v+\alpha v')\\ &= (\alpha u,\alpha v)+(\alpha u',\alpha v')\\ &= \alpha\cdot(u,v)+\alpha\cdot(u',v')\end{aligned}$$

b) Para probar que $\Delta$ y $\overline{\Delta}$ son subespacios vectoriales de $E\times E$ demostramos que son no vacios y que son cerrados para la suma y produto por escalar.

Son no vacios ya que por ejemplo $(0,0)\in\Delta$ y $(0,0)\in\overline{\Delta}$. Son cerrados ya que si $(u,v),(u',v')\in\Delta$ entonces $u=v$ y $u'=v'$, luego $\forall\alpha,\beta\in K$ se tendra que $\alpha u+\beta u'=\alpha v+\beta v'$, es decir $(\alpha u+\beta u',\alpha v+\beta v')\in\Delta$, de donde se deduce que $\alpha\cdot(u,v)+\beta\cdot(u',v')\in\Delta$. En forma analoga si $(u,v),(u',v')\in\overline{\Delta}$ entonces $u=-v$ y $u'=-v'$, luego $\forall\alpha,\beta\in K$ se tendra que $\alpha u+\beta u'=-(\alpha v\beta v')$ es decir $(\alpha u+\beta u',\alpha v+\beta v')\in\overline{\Delta}$, de donde se deduce que $\alpha\cdot(u,v)+\beta\cdot(u',v')\in\overline{\Delta}$.

Para probar que $\Delta\oplus\overline{\Delta}=E\times E$ probamos que $\Delta+\overline{\Delta}=E\times E$ y que $\Delta\cap\overline{\Delta}=\{(0,0)\}$ Si $(a,b)$ es un vector cualquiera de $E\times E$ veamos que existen $(u,u)\in\Delta$ y $(v,-v)\in\overline{\Delta}$ tales que $(u,u)+(v,-v)=(a,b)$. En efecto, para lo anterior es suficiente que $u+v=a$ y $u-v=b$, es decir $(1+1)u=a+b$ y $(1+1)v=a-b$. Si $2=(1+1)\neq 0$ entonces basta tomar $u=(a+b)/2$ y $v=(a-b)/2$. Si $(u,v)\in\Delta\cap\overline{\Delta}$ entonces $u=v$ y $u=-v$, es decir $2u=0$ y $2v=0$. Nuevamente, si $2\neq 0$ entonces necesariamente $u=v=0$, es decir $\Delta\cap\overline{\Delta}\subseteq\{(0,0)\}$

c) Para probar que $\Delta$ y $\overline{\Delta}$ son isomorfos a $E$ basta con encontrar sendos isomorfismos $T : \Delta \to E$ y $\overline{T} : \overline{\Delta} \to E$.

Consideremos $T : \Delta \to E$ tal que $T(u,u) = u$. $T$ es lineal, en efecto: $T(\alpha(u,u) + \beta(v,v)) = T(\alpha u + \beta v, \alpha u + \beta v) = \alpha u + \beta v = \alpha T(u,u) + \beta T(v,v)$

$T$ es inyectiva, en efecto: $T(u,u) = T(v,v) \Rightarrow u = v \Rightarrow (u,u) = (v,v)$

$T$ es epiyectiva, en efecto $\forall u \in E$ el vector $(u,u) \in \Delta$ es tal que $T(u,u) = u$.

En forma análoga se demuestra que $\overline{T} : \overline{\Delta} \to E$ definida por $\overline{T}(u,-u) = u$ es un isomorfismo de $\overline{\Delta}$ en $E$.

d) Si dim$E = n$ como $E \cong \Delta \cong \overline{\Delta}$ entonces dim$\Delta$ =dim$\overline{\Delta} = n$. Commo ademas $E \times E = \Delta \oplus \overline{\Delta}$ entonces dim$E \times E$ =dim$\Delta$+dim$\overline{\Delta} = n + n = 2n$.

**P.3.-**

a) Para probar que $T$ es lineal notemos que si $A = (A_{ij})$ y $B = (B_{ij})$ son dos matrices de $3 \times 3$ cualesquiera, entonces $T(\alpha A + \beta B) = \alpha T(A) + \beta T(B)$.

En efecto, llamando $C = (C_{ij})$ a la matriz definida por $C_{ij} = \alpha A_{ij} + \beta B_{ij}$ se tiene que:

$$\begin{array}{rcl} T(\alpha A + \beta B) & = & T(C) \\ & = & C_{11} + C_{22} + C_{33} \\ & = & \alpha A_{11} + \beta B_{11} + \alpha A_{22} + \beta B_{22} + \alpha A_{33} + \beta B_{33} \\ & = & \alpha(A_{11} + A_{22} + A_{33}) + \beta(B_{11} + B_{22} + B_{33}) \\ & = & \alpha T(A) + \beta T(B) \end{array}$$

Para calcular las dimensiones del conjunto imagen de $T$ (Im $T$) y del núcleo de $T$ (Ker $T$) notemos que: por un lado, Im $T \subseteq I\!R$ luego dim(Im $T$)$\leq 1$ y por otro, Ker $T \subseteq M_{3,3}(I\!R)$ luego dim(Ker $T$)$\leq 9$.

Además, dado $x \in I\!R$ cualquiera, basta tomar la matriz $A = \frac{x}{3}I$ para que $T(A) = x$, luego $I\!R \subseteq$Im $T$, por lo tanto dim(Im $T$)$\geq 1$, es decir dim(Im $T$)$= 1$.

Finalmente, se sabe que dim(Im $T$)+dim(Ker $T$)=9. Como dim(Im $T$)$= 1$ entonces se deduce que dim(Ker $T$)$= 8$

b) Como Im $T$=$I\!R$ entonces una base de Im $T$ esta formada por cualquier real $a \neq 0$.

Para encontrar una base del Ker $T$ basta con encontrar 8 matrices l.i. o que sean generadoras. Para ello puede escribirse la ecuación:

$$\begin{array}{rcl} A \in \text{ Ker } T & \Leftrightarrow & A_{11} + A_{22} + A_{33} = 0 \\ & \Leftrightarrow & A_{11} = -A_{22} - A_{33} \end{array}$$

Dicho de otro modo, las matrices $A$ del núcleo de $T$ son las generadas de la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
A &= A_{12}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+A_{13}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+A_{21}\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+A_{22}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\\
&+ A_{23}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}+A_{31}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}+A_{32}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}+A_{33}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Las 8 matrices que aparecen son entonces generadoras del núcleo de $T$ y como la dimensión es 8, deben ser l.i. y por lo tanto forman la base buscada.

$T$ no es inyectiva ya que Ker $T \neq \{0\}$.

$T$ si es epiyectiva ya que Im $T = \mathbb{R}$.