PAUTA CONTROL 5 - MA11A-ALGEBRA

(1998)

Pregunta 1.

$\pi : x + y - z = 0 \Rightarrow$ Normal $= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

L: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ para algún $\lambda \in I\!R$

Claramente $0 \in \pi$ y $0 \in L$, y L no está contenida en π pues $2 + 1 - 0 \neq 0$.

(i) Calculemos la recta que pasa por un punto fijo de L, digamos $P = \bar{\lambda} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

y que es $\perp$ a π.

L”: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \bar{\lambda} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha \in I\!R.$

Calculemos el punto $P_\perp$ que corresponde a la intersección de L” y π:

$$P_\perp = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \text{ satisface } \rightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccccccc} x_0 & + & y_0 & - & z_0 & = & 0 & & & & \\ x_0 & = & \alpha & + & 2\bar{\lambda} & \Rightarrow & x_0 & = & -z_0 & + & 2\bar{\lambda} \\ y_0 & = & \alpha & + & \bar{\lambda} & \Rightarrow & y_0 & = & -z_0 & + & \bar{\lambda} \\ z_0 & = & -\alpha & & & & & & & & \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{cccccccccc} -z_0 & + & 2\bar{\lambda} & -z_0 & + & \bar{\lambda} & - & z_0 & = & 0 \\ - & z_{z0} & + & z\bar{\lambda} & = & 0 & & & & \\ & z_0 & = & \bar{\lambda} & & & & & & \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{ccc} x_0 & = & \bar{\lambda} \\ y_0 & = & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow P_\perp = \begin{pmatrix} \bar{\lambda} \\ 0 \\ \bar{\lambda} \end{pmatrix}$$

Luego el punto deseado es

$$P_\pi = P + 2\ (P_\perp - P) = 2\ P_\pi - P = \begin{pmatrix} 2\bar\lambda \\ 0 \\ 2\bar\lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2\bar\lambda \\ \bar\lambda \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\bar\lambda \\ 2\bar\lambda \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow P_\lambda = \bar\lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Luego $L' : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ para algún $\lambda \in I\!R$.

(ii) Como contiene a L y es perpendicular a π entonces $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ son vectores en el plano π' , pues $0 \in L$ y luego al plano π'. Además no son colineales. Hemos deducido que son 2 directores de π' : la ecuación será:

$$\pi' : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ \text{para algún } \lambda, \mu \in I\!R.$$

(iii) Para probar $L' \subseteq \pi'$ basta ver que $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \pi'$:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda + \mu \\ \lambda + \mu \\ -\mu \end{pmatrix} \quad \begin{array}{cccc} \Rightarrow & \mu & = & -2 \\ \Rightarrow & \lambda & + & 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Pregunta 2.

(i) Para probar que es sub espacio sean $p(x), q(x) \in V$ y $\alpha, \beta \in I\!R$.

Luego

$$\alpha p(x) + \beta q(x) = \sum_{i=0}^{m} \underbrace{(\alpha a_i + \beta b_i)}_{c_i} x^i$$

Además

$$C_{m-i} = (\alpha a_{m-i} + \beta b_{m-i}) = \alpha a_i + \beta b_i = c_i$$

Luego V es $s.e.v.$

(ii) Sea $p(x) \in V$. Luego,

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n + a_{n-1}x^{n+1} + \cdots + a_1 x^{m-1} + a_0 x^m$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i + a_n x^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^{m-i}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} a_i (x^i + x^{m-i}) + a_n x^n$$

Vamos a probar que $\{x^i + x^{m-i},\ i \in \{0, \cdots, n-1\},\ x^n\}$ es li. pues ya sabemos que generan V.

Resolvamos en $\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1},\ \alpha_n$ la ecuación $\alpha_0(1 + x^m) + \alpha_1(x + x^{m-1}) + \cdots + \alpha_{n-1}(x^{n-1} + x^{n+1}) + \alpha_n\ x^n = 0(x)$

Como $\{1, x, x^2, \cdots,\ x^m\}$ son base de $P_n(x)$ se tiene que $\alpha_0\ 1 +\ \alpha_1\ x\ +\ \cdots\ + \alpha_{n-1}x^{n-1}\ + \alpha_n\ x^n\ +\ \alpha_{n-1}\ x^{n+1}\ +\ \cdots\ +\ \alpha_0 x^m = \alpha(x)$

tiene como única solución

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_{n-1} = \alpha_n = 0$$

Luego $dim\ V = n + 1$ y base $\{1 + x^m, \cdots, x^{n-1} + x^{n+1}, x^n\}$

(iii) Sabemos que $dim\ P_{n-1}(x) = n$ y $dim\ V = n+1$ luego bastará probar que $P_{n-1}\ (x) \cap V = \{0(x)\}$ pues

$$
\begin{aligned}
dim(V + P_{n-1}(x)) = dimV + dimP_{n-1}(x) = n+1+n &= 2n+1 \\
&= m+1 = dimP_m(x)
\end{aligned}
$$

lo que implica que $V \oplus P_{n-1}\ (x) = P_m(x)$

Entonces probemos que $P_{n-1}\ (x) \cap V = \{0(x)\}$:

Sea $P(x) = \sum\limits_{i=0}^{m}\ a_i\ x^i \in P_{n-1}\ (x)\ \cap V$. Luego, como está en $P_{n-1}(x)$ se tiene que $a_n = a_{n+1} = \cdots = a_m = 0$. Pero $a_i = a_{m-i}$ para $i \in \{0, \cdots, n-1\}$ pues tb está en V. Luego $a_0 = \cdots = a_m = 0$ y $p(x) = 0(x)$.

(iv) Probemos que $V' \cap V = \{0(x)\}$:

Sea $p(x) = \sum\limits_{i=0}^{m}\ a_i\ x^i\ \in\ V' \cap, V$ luego $a_i = a_{m-i} = -a_{m-i}$ para $i \in \{0, \cdots, m\}$. Es decir $a_{m-i} = -a_{m-i}$, lo que quiere decir es que $a_{m-i}\ =\ 0\ \forall\ i\ \in\ \{0, \cdots, m\}$, es decir $p(x) = 0(x)$.

Para concluir verificaremos que $dim\ V' = n$. Observemos que si $p(x) = \sum\limits_{i=0}^{m}\ a_i\ x$ $\in V'$ entonces $a_n = a_{m-n} = -a_{m-n}0$. Luego

$$
p(x) = \sum_{i=0}^{n-1}\ a_i\ x^i + \sum_{i=n+1}^{m}\ a_i\ x^i = \sum_{i=0}^{n-1}\ a_i\ x^i + \sum_{i=n+1}^{m}(-a_{m-i})x^i
$$

$$
= \sum_{i=0}^{n-1}\ a_i\ x^i + \sum_{i=0}^{n-1}(-a_i)\ x^{m-i} = \sum_{i=0}^{n-1}\ a_i\ (x^i - x^{m-i})
$$

Luego $dim\ (V') \leq n$. Falta ver que $\{x^i - x^{m-i};\ i\ \in \{\ 0, \cdots,\ n-1, \}\}$ es base de V'. En efecto, se hace análogamente a V.

Pregunta 3.

(a)

(i) Apliquemos directamente el procedimiento de $G.S.$ a este generador:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow ||v_1|| = 2 \Rightarrow w_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \text{ (es normal)}$$

$$\tilde{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3/2 \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 \\ 1/4 \\ -1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}, ||\tilde{v}_2|| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow w_2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} -$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{3}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} \frac{3}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} - \sqrt{3} \begin{pmatrix} \frac{3}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5/2 \\ -5/2 \\ 5/2 \\ -5/2 \end{pmatrix} -$$

$$\begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & + & 5/2 & - & 3/2 \\ 3 & - & 5/2 & - & 1/2 \\ -3 & + & 5/2 & + & 1/2 \\ 3 & - & 5/2 & - & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

luego $\tilde{v}_3$ es dependiente con los anteriores, $V = \langle \{w_1, w_2\} \rangle$ es una base ortogonal y dim $V = 2$

(ii) Para calcular una base de $V^\perp$ hay que completar la base $\{w_1, w_2\}$ y luego terminar la ortonormalización.

Podemos completarla con $\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{u_3}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{u_4} \right\}$. En efecto probemos primero que $\{w_1, w_2, u_3, u_4\}$ son linealmente independientes:

$$\alpha\ w_1 + \beta\ w_2 + \lambda u_3 + \sigma u_4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} \frac{\alpha}{2} + \frac{3\beta}{2\sqrt{3}} + \lambda = 0 \\ \frac{-\alpha}{2} + \frac{\beta}{2\sqrt{3}} + \lambda = 0 \\ \left.\begin{array}{l} \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2\sqrt{3}} + \sigma = 0 \\ \frac{-\alpha}{2} + \frac{\beta}{2\sqrt{3}} + \sigma = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2\sigma = 0 \Rightarrow \sigma = 0, \lambda = 0, \alpha = \beta = 0. \end{array}$$

$\Rightarrow$ *son l.i.*

Ahora hagamos $G.S$ con u_3 *y* u_4 desde w_1, w_2 para encontrar una base de $V^\perp$

$$\tilde{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} -$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{3}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} \frac{3}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 - \frac{2}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \frac{3}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1/3 \\ -1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2/3 \\ 1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$$

$$||\tilde{v}_3|| = \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Rightarrow w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, w_1 \right\rangle w_1 - \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, w_2 \right\rangle w_2 - \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, w_3 \right\rangle w_3$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 0w_1 - 0w_2 + 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow w_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Base de $V^{\perp} : \{w_3, w_4\}$

(b) Supongamos en G.S: $w_1 = \frac{v_1}{||v_1||}$ luego como $v_1 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ | \\ 0 \end{pmatrix}$ con $a > 0$ se tiene que $w_1 = e_1$.

Supongamos hemos probado que $w_1 = e_1, \cdots, w_k = e_k$ en G.S., con $1 \leq k < n$ y queremos hacer entrar v_{k+1}. Entonces

$$\tilde{v}_{k+1} = v_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \underbrace{< v_{k+1}, e_i >}_{\text{componente de } v_{k+1}} \quad e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{posición}(k+1, k+1)$$

de M que es > 0

luego $\tilde{v}_{k+1} =$ cte. e_{k+1} y cte. > 0. Luego

$$\frac{\tilde{v}_{k+1}}{\text{cte}} = e_{k+1}.$$

Esto prueba que G - S conduce a $\{e_1, \cdot\cdot, e_n\}$.