PAUTA CONTROL 5 - MA11A-ALGEBRA

(1999)

Pregunta 1.

i) $\cdot R = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \pi$ pues $2 \cdot 1 - 0 - 0 = 2$

$\cdot$ y $P - R = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

donde $N = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ es el vector normal a π, luego $(P - R)||N$. Luego R es la proyección de P sobre π.

ii) La recta $L : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in I\!R.$

Hay que encontrar $Q \in L$ tal que $< Q - P, d >= 0$

$$\Rightarrow \langle t \cdot d + R - P, d \rangle = 0$$
$$\Rightarrow t \ \langle d, d \rangle = \langle P - R, d \rangle$$
$$\Rightarrow t = \frac{\langle P - R, d \rangle}{\langle d, d \rangle} = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}{1} = -2$$

$$\Rightarrow Q = (-2) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

iii) $d_1 = R - Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} y d_2 = P \cdot R = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} = d, x d_2$$

$\Rightarrow$ ecuación normal plano que contiene P, Q, R :

$-4x - 8z = -4$ pues $-4 \cdot 1 + 0 \cdot 0 - 8 \cdot 0 = -4$, al evaluar en R.

Pregunta 2.

a.)

a.1.) Sean $p(x), r(x) \in V$ y $\alpha, \beta \in I\!R$.

$\Rightarrow \alpha p(x) + \beta r(x) \in P_3\ (I\!R)$ pues $P_3(I\!R)$ es cerrado por suma y ponderación.

además existen $q_1(x)$ y $q_2(x)$ polinomios a coeficientes reales tales que

$$\begin{array}{ll} p(x) & = (x^2+5)q_1(x) \\ r(x) & = (x^2+5)q_2(x) \end{array}$$

$$\Rightarrow \alpha p(x) + \beta r(x) = (x^2+5)\underbrace{(\alpha q_1(x) + \beta q_2(x))}_{q(x)}$$

donde $q(x)$ es un polinomio a coeficientes reales.

$\Rightarrow \alpha p(x) + \beta r(x) \in P_3(I\!R)$ y $\alpha p(x) + \beta r(x) \in V$.

a.2.) Si $p(x) \in V \Rightarrow p(x) = (x^2+5) \cdot q(x)$,

como $g_r(p(x)) \leq 3 \Rightarrow g_r(q(x)) \leq 1$

$\Rightarrow q(x) = ax + b$

$\Rightarrow p(x) = a \cdot (x^3 + 5x) + b(x^2+5)$.

Por otro lado si $p(x) = a\cdot(x^3+5x)+b(x^2+5)$ para algun espacio$a, b \in I\!R$ entonces $p(x) \in V$. Luego todo elemento de V es combinación lineal de (x^3+5x) y (x^2+5). Esto prueba que

$$V =< \{x^3+5x,\ x^2+5\} >$$

Probemos que estos polinomios son l.i.

$$\alpha(x^3+5x) + \beta(x^2+5) = \emptyset(x)$$

$\Leftrightarrow 5 \cdot \beta + 5\alpha x + \beta x^2 + \alpha x^3 = \emptyset(x)$

$$\Rightarrow \begin{array}{ll} \beta = 0 & \text{(igualando} \\ \alpha = 0 & \text{coeficientes)} \\ \beta = 0 & \\ \alpha = 0 & \end{array} \Rightarrow \alpha = \beta = 0 \Rightarrow \text{ son } l.i.$$

$$\Rightarrow \text{ dim } V = 2 \; y \text{ Base } V = \{x^3 + 5x, x^2 + 5\}$$

a.3.) Probemos que $V \cap P_1(I\!R) = \{\emptyset(x)\}$:

$$\text{Sea } p(x) \in V \cap P_1(I\!R) \Rightarrow \begin{array}{rl} p(x) = & a_0 + a_1 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 \\ p(x) = & a(x^3 + 5x) + b(x^2 + 5) \\ = & 5b + 5ax + bx^2 + ax^3 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{ll} a_0 & = 5b \\ a_1 & = 5a \\ 0 & = b \\ 0 & = a \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} a_0 = a_1 = 0 \\ y \; p(x) = \emptyset(x) \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{ll} dim V + dim \; P_1(I\!R) & = dim(V + P_1(I\!R)) \\ 2 + 2 & = 4 \end{array}$$

Como $V + P_1(I\!R) \subseteq P_3(I\!R) \; y \; dim(P_3(I\!R)) = 4$

$$\Rightarrow V \oplus P_1(I\!R) = P_3(I\!R)$$

b.)

b.1.)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & +2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{v_3} \right\} \text{ es l.i y genera } W.$$

b.2.) Notar que

$$< v_1, v_2 > = 1 - 1 = 0$$
$$< v_1, v_3 > = 0$$
$$< v_2, v_3 > = 0$$

$\Rightarrow \{v_1, v_2, v_3\}$ son ortogonales

como $||v_1|| = \sqrt{2}$, $||v_2|| \; = 2, ||v_3|| = \sqrt{2}$

$$\Rightarrow \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}}_{u_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}}_{u_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}}_{u_3} \right\} \text{ es una base ortogonal de } W$$

b.3.) Agregamos un vector l.i. a la base anterior:

El vector $v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sirve, en efector,

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \alpha + \beta &= 0 & \Rightarrow \alpha = \beta = 0 \\ \beta + \gamma &= 0 & \Rightarrow \gamma = 0 \\ -\alpha + \beta &= 0 & \\ \beta - \gamma + b &= 0 & \Rightarrow b = 0 \end{aligned}$$

<u>Ahora ortonormalizamos:</u> V_4

$$\bar{v}_4 = v_4 - \langle v_4, u_1 \rangle u_1 - \langle v_4, u_2 \rangle u_2 - \langle v_4, u_3 \rangle u_3$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 \cdot u_1 - 1/2 \cdot u_2 + \tfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot u_3$$

$$\bar{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/4 \\ 1/4 \\ -1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}, \|\bar{v}_4\| = \sqrt{\tfrac{1}{16} \cdot 4} = \tfrac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad u_4 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Base ortonormal de $I\!R4$:

$$\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$$

Pregunta 3.

i.) Sean $y, z \in W$ y $\alpha, \beta \in I\!R$; sea $u \in U$

$$\begin{aligned}\langle A(\alpha\ y\ +\beta z), Au\rangle &= \alpha\langle a\ y\ , Au\rangle + \beta\langle Az, Au\rangle\\ &= \alpha\cdot 0 \qquad +\beta\cdot 0 \qquad \textit{pues } y\ , z\in W\\ &= 0\end{aligned}$$

$$\Rightarrow (\alpha\ y+\beta z)\in W$$

Sean $v \in W \cap U \Rightarrow$ como $v \in U \wedge v \in W$ entonces $\langle Av, Av\rangle = 0$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow ||A\cdot v|| = 0\\ &\Rightarrow A\cdot v = 0 \Rightarrow v = A^{-1}\cdot 0 = 0\\ &\Rightarrow v = 0\end{aligned}$$

ii.)

Sean $v_1, v_2 \in I\!R^n, \alpha, \beta \in I\!R \Rightarrow$ existen $u_1, u_2 \in I\!R^n$

tales que $v_1 = A\cdot u_1, v_2 = A\cdot u_2 \Rightarrow \alpha v_1 + \beta v_2 = A(\alpha u_1 + \beta u_2)$

como U es $s.e.v. \Rightarrow \alpha u_1 + \beta u_2 \in U \Rightarrow \alpha v_1 + \beta v_2 \in V$

iii.) Probemos que $\{u_1, \cdots, u_k\}$ son l.i.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k}\alpha_i u_i = 0 \Rightarrow A\cdot(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\cdot u_i) = 0\\ \Rightarrow \sum_{i=1}^{k}\alpha_i\cdot A\cdot u_i = 0\\ \Rightarrow \sum_{i=1}^{k}\alpha_i\cdot A\cdot A^{-1}\ \cdot\ v_i = 0\\ \Rightarrow \sum_{i=1}^{k}\alpha_i\ v_i = 0\end{aligned}$$

como $\{v_1,\ \cdots,\ v_k\}$ son $l.i. \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$

$\Rightarrow \{u_1, \cdots, u_k\}$ es un conjunto l.i.

como $dim(U) = k \Rightarrow \{u_1, \cdots, u_k\}$ es base de U.

Además:

$$\langle A \cdot u_i,\ A \cdot u_j \rangle = \langle A \cdot A^{-1} v_i,\ A \cdot A^1 v_j \rangle = \langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \neq j \\ 1 & \text{si} \quad i = j \end{cases}$$

pues $\{v_1, \cdots, v_k\}$ es base ortonormal.

iv.) $w \in W \Rightarrow \langle Aw, Au \rangle = 0\ \forall u \in U$, en particular para $u = u_i, i = \{1, \cdots, k\}$

$$\Rightarrow \langle Aw, Au_i \rangle = 0\ \forall i \in \{1, \cdots, k\}$$

Si $\langle Aw, Au_i \rangle = 0\ \forall i = 1, \cdots, k$, como $\{u_i, \cdots, u_k\}$ es base de U

entonces dado $u \in U$ se tiene que existen $\lambda_1, \cdots, \lambda_k \in I\!R$ tales que $u = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \langle Aw, Au \rangle &= \langle Aw, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i A u_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \underbrace{\langle Aw, Au_i \rangle}_{0} = 0 \end{aligned}$$

v.) Claramente

$z = \sum_{i=1}^{k} \langle Av, Au_i \rangle u_i \in U$ pues es combinación lineal de $\{u_1, \cdots, u_k\}$ que genera U

Probemos que $(v - z) \in W$: sean $u_i \in U, i \in \{1, \cdots, k\}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \langle A(v - z), Au_i \rangle &= \langle Av - Az, Au_i \rangle \\ &= \langle Av,\ Au_i \rangle - \langle Az,\ Av_i \rangle \\ &= \langle Av, Au_i \rangle - \langle A \ \cdot (\sum_{j=1}^{k} \langle Av,\ Au_j \rangle u_j), Au_i \rangle \\ &= \langle Av, Au_i \rangle - \sum_{j=1}^{k} \langle Av, Au_j \rangle \underbrace{\langle Av_u, Au_i \rangle}_{\substack{0 \text{si } i \neq j \\ 1 \text{si } i = j}} \end{aligned}$$

$\Rightarrow = \langle Av, Au_i \rangle - \langle Av, Au_i \rangle = 0$

$\Rightarrow (v - z) \in W$

vi.) de (i) $U \cap W = \{0\}$ y dado $v \in I\!R^n \Rightarrow v = (v - z) + z$ con $(v - z) \in W\ y\ x \in U \Rightarrow I\!R^n = W \oplus U$

como $dimU = k \Rightarrow \underline{dimW = n - k.}$