U. DE CHILE

INGENIERIA

Pauta Control #5 MA11A Álgebra

Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile.

Semestre Primavera 2004

El objetivo de esta pauta es orientar la corrección de los ayudantes y dar al alumno una guía de estudio. Es *responsabilidad del alumno* tener una copia de esta pauta para el día de la revisión de su prueba. Esta se puede obtener en la página:
`http://www.dim.uchile.cl/~lmella/MA11A.html` en formato ps o pdf.

P1.- En el siguiente problema $\mathcal{P}_4$ denota el espacio vectorial de polinomios con coeficientes en $\mathbb{R}$ de grado menor o igual a 4. Definamos

$$W_1 = \{p \in \mathcal{P}_4 : p(1) + 2p(-1) = 0\}$$
$$W_2 = \{p \in \mathcal{P}_4 : p(x) = a + bx + cx^2 + bx^3 + ax^4 \quad \text{con } a, b, c \in \mathbb{R}\}.$$

i) (1 pto.) Pruebe que W_1, W_2 son subespacios vectoriales de $\mathcal{P}_4$.

ii) (2 ptos.) Encuentre una base de W_1 y W_2.

iii) (2 ptos.) Encuentre una base de $W_1 \cap W_2$.

iv) (1 pto.) Calcule la dimensión de $W_1 + W_2$.

Pauta.

i) $\underline{W_1 \text{ es subespacio vectorial}}$: sean p, $q \in W_1$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\begin{aligned}(p+\lambda q)(1) + 2(p+\lambda q)(-1) &= p(1) + \lambda q(1) + 2(p(-1) + \lambda q(-1)) \\ &= p(1) + 2p(-1) + \lambda(q(1) + 2q(-1)) = 0.\end{aligned}$$

$\underline{W_2 \text{ es subespacio vectorial}}$: sean p, $q \in W_2$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ y escribamos $p(x) = a_1 + b_1x + c_1x^2 + b_1x^3 + a_1x^4$ y $q(x) = a_2 + b_2x + c_2x^2 + b_2x^3 + a_2x^4$. Entonces

$$\begin{aligned}(p+\lambda q)(x) &= a_1 + b_1x + c_1x^2 + b_1x^3 + a_1x^4 + \lambda(a_2 + b_2x + c_2x^2 + b_2x^3 + a_2x^4) \\ &= a_1 + \lambda a_2 + (b_1 + \lambda b_2)x + (c_1 + \lambda c_2)x^2 + (b_1 + \lambda b_2)x^3 + (a_1 + \lambda a_2)x^4.\end{aligned}$$

Esto prueba que $p + \lambda q \in W_2$.

ii) $\underline{\text{Base de } W_1.}$ Sea $p \in W_1$ y escribamos $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$. Entonces $p(1) + 2p(-1) = 0$ es equivalente a la ecuación

$$\begin{aligned}a + b + c + d + e + 2(a - b + c - d + e) = 0 \\ \iff 3a - b + 3c - d + 3e = 0.\end{aligned}$$

Dejando a, b, c, d como parámetros libres podemos expresar $e = -a + \frac{1}{3}b - c + \frac{1}{3}d$. Luego

$$\begin{aligned}p(x) &= a + bx + cx^2 + dx^3 + (-a + \frac{1}{3}b - c + \frac{1}{3}d)x^4 \qquad (1)\\ &= a(1 - x^4) + b(x + \frac{1}{3}x^4) + c(x^2 - x^4) + d(x^3 + \frac{1}{3}x^4).\end{aligned}$$

Esto muestra que los vectores $1 - x^4$,$x + \frac{1}{3}x^4$, $x^2 - x^4$, $x^3 + \frac{1}{3}x^4$ generan W_1. Además son linealmente independientes (l.i.) ya que si en (1) resulta $p = 0$ necesariamente $a = b = c = d = 0$ (utilizando el hecho conocido que 1, x, x^2, x^3 y x^4 son l.i.). Luego

$$B_1 = \left\{1 - x^4, x + \frac{1}{3}x^4, x^2 - x^4, x^3 + \frac{1}{3}x^4\right\}$$

es base de W_1.

Base de W_2. Si $p \in W_2$ por definición

$$\begin{aligned} p(x) &= a + bx + cx^2 + bx^3 + ax^4 \\ &= a(1 + x^4) + b(x + x^3) + cx^2. \end{aligned}$$

Por otro lado si $a(1 + x^4) + b(x + x^3) + cx^2 = 0$ entonces $a + bx + cx^2 + bx^3 + ax^4 = 0$ y luego $a = b = c = 0$. Luego

$$B_2 = \left\{1 + x^4, x + x^3, x^2\right\}$$

es base de W_2.

iii) Supongamos que $p \in W_1 \cap W_2$. Lo que sigue se puede hacer de varias formas. Escribamos $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$. Entonces $p \in W_1$ equivale a

$$a + b + c + d + e + 2(a - b + c - d + e) = 0 \Longleftrightarrow 3a - b + 3c - d + 3e = 0$$

y $p \in W_2$ es equivalente a $a = e, b = d$. Reemplazando en la ecuación anterior obtenemos

$$3a - b + 3c - b + 3a = 0 \Longleftrightarrow 6a - 2b + 3c = 0.$$

Dejando a, b como parámetros libres tenemos $c = -2a + \frac{2}{3}b$ y luego

$$\begin{aligned} p(x) &= a + bx + (-2a + \frac{2}{3}b)x^2 + bx^3 + ax^4 \\ &= a(1 - 2x^2 + x^4) + b(x + \frac{2}{3}x^2 + x^3). \end{aligned}$$

Los polinomios $1 - 2x^2 + x^4$, $x + \frac{2}{3}x^2 + x^3$ son l.i. ya que si $a(1 - 2x^2 + x^4) + b(x + \frac{2}{3}x^2 + x^3) = 0$ entonces $a + bx + (-2a + \frac{2}{3}b)x^2 + bx^3 + ax^4 = 0$ y deducimos $a = b = 0$. Concluimos que

$$B_3 = \left\{1 - 2x^2 + x^4, x + \frac{2}{3}x^2 + x^3\right\}$$

es una base de $W_1 \cap W_2$.

iv) Por las partes anteriores sabemos que $dim(W_1) = 4$, $dim(W_2) = 3$ y $dim(W_1 \cap W_2) = 2$ y gracias a un teorema conocido

$$\begin{aligned} dim(W_1 + W_2) &= dim(W_1) + dim(W_2) - dim(W_1 \cap W_2) \\ &= 4 + 3 - 2 = 5. \end{aligned}$$

Puntaje.

i) 0.5 por W_1, 0.5 por W_2

ii) 1 por W_1, 1 por W_2. En cada caso el puntaje es:

  0.2 Por “traducir ” $p \in W_j$ en una condición para los coeficientes.

  0.4 Usar lo anterior para escribir p como combinación lineal de algunos polinomios

  0.4 Por verificar que los polinomios anteriores son l.i.

iii) 1 Por encontrar las ecuaciones sobre los coeficiente de p equivalentes a $p \in W_1 \cap W_2$

0.5 Por, a partir de lo anterior, escribir $p \in W_1 \cap W_2$ como combinación lineal de algunos polinomios.

0.5 Verificar que los polinomios anteriores son l.i.

iv) 1 Recordar y utilizar la fórmula sobre las dimensión de $W_1 + W_2$. Castigar restando 0.5 si alguien dice $dim(W_1 + W_2) = dim(W_1) + dim(W_2)$.

P2.- a) Sean

$$v_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\1\\2\end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix}1\\-1\\2\\3\end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\end{bmatrix} \quad v_4 = \begin{bmatrix}-1\\2\\-3\\-4\end{bmatrix}.$$

i) (1 pto.) Encuentre una base del subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ generado por v_1, v_2, v_3, v_4.

ii) (1 pto.) De una base de vectores ortogonales entre sí para el subespacio de la parte anterior.

iii) (1 pto.) Encuentre una base del espacio $\langle\{v_1, v_2, v_3, v_4\}\rangle^\perp$.

b) Sea $L \subset \mathbb{R}^3$ la recta que pasa por $p = (1, 0, 0)$ con vector director $d = (1, -1, 1)$.

i) (0.5 ptos.) ¿Es L un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$?

ii) (1.5 ptos.) Se define $S = \{z \in \mathbb{R}^3 : \langle z, x\rangle = 0\, \forall x \in L\}$. Pruebe que S es la recta que pasa por el origen con vector director $p \times d$.

iii) (1 pto.) Encuentre una base de $S^\perp$.

Pauta.

a) i) Formamos una matriz con filas dadas por los vectores v_1, v_2, v_3, v_4 y escalonamos

$$\begin{matrix}1 & 0 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ -1 & 2 & -3 & -4\end{matrix} \quad \longrightarrow \quad \begin{matrix}1 & 0 & 1 & 2\\ 0 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & -1\\ 0 & 2 & -2 & -2\end{matrix} \quad \longrightarrow \quad \begin{matrix}1 & 0 & 1 & 2\\ 0 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{matrix}$$

Deducimos que v_1 y v_2 son l.i. mientras que v_3 y v_4 son combinaciones lineales de v_1 y v_2. Luego una base del espacio generado por v_1, v_2, v_3, v_4 es $\{v_1, v_2\}$. También es cierto que v_1 y $(0, -1, 1, 1)$ generan el espacio anterior.

ii) Construiremos un vector $w \in \mathbb{R}^4$ tal que v_1 y w sean ortogonales y v_1, w generen el mismo subespacio que $\{v_1, v_2\}$. De este último requerimiento es claro que debemos buscar w de la forma $w = \alpha v_1 + \beta v_2$. Ahora bien,

$$\langle w, v_1\rangle = \langle \alpha v_1 + \beta v_2, v_1\rangle = \alpha\langle v_1, v_1\rangle + \beta\langle v_2, v_1\rangle.$$

Pero

$$\langle v_1, v_1\rangle = 1 + 1 + 4 = 6 \qquad \langle v_2, v_1\rangle = 1 + 2 - 6 = -3.$$

Luego debemos hallar α, β tales que $6\alpha - 3\beta = 0$. Podemos elegir $\alpha = 1$, $\beta = 2$. Así encontramos

$$w = v_1 + 2v_2 = \begin{bmatrix}3\\-2\\5\\-4\end{bmatrix}.$$

iii) Buscamos el espacio ortogonal a $\langle\{v_1, v_2, v_3, v_4\}\rangle$ que es el mismo que el ortogonal a $\langle\{v_1, v_2\}\rangle$. Escribamos las condiciones que satisface $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \langle\{v_1, v_2\}\rangle^\perp$:

$$\langle x, v_1\rangle = 0, \qquad \langle x, v_2\rangle = 0 \iff \begin{cases} x_1 \quad\quad\;\; + \;\; x_3 \;+\; 2x_4 = 0\\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0.\end{cases}$$

Escalonando este sistema encontramos

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & & & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \\ & & -x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0. \end{array}$$

Dejando x_3, x_4 como parámetros tenemos $x_2 = x_3 + x_4$ y $x_1 = -x_3 - 2x_4$. Así podemos escribir el conjunto solución de este sistema como

$$\left\{ \begin{bmatrix} -x_3 - 2x_4 \\ x_3 + x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} : x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} : x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

Estos dos últimos son claramente l.i., luego tenemos una base de $\langle v_1, v_2 \rangle^\perp$.

b) Primero observemos que $L = \{x = p + \lambda d : \lambda \in \mathbb{R}\}$.

i) L no es espacio vectorial, puesto que $0 \notin L$. En efecto, si $0 \in L$ entonces existiría $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $0 = p + \lambda d$, es decir, p y d serían paralelos. Pero esto es claramente falso.

ii) Definamos L_2 como la recta que pasa por el origen y que tiene vector director $p \times d$, notando que $p \times d \neq 0$ ya que p y d no son paralelos. Probaremos que $S = L_2$.

$\underline{L_2 \subset S}$. Sea $z \in L_2$. Entonces z se escribe $z = \lambda_2 p \times d$ para algún $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ y encontramos que para cualquier $x = p + \lambda d \in L$:

$$\langle z, x \rangle = \langle z, p + \lambda d \rangle = \langle z, p \rangle + \lambda \langle z, d \rangle = \lambda_2 \langle p \times d, p \rangle + \lambda \lambda_2 \langle p \times d, d \rangle = 0$$

ya que $p \times d$ es ortogonal a p y d.

$\underline{S \subset L_2}$. Sea $z \in L$. Sabemos que $0 = \langle z, p + \lambda d \rangle = \langle z, p \rangle + \lambda \langle z, d \rangle \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$. Esto implica inmediatamente que $\langle z, p \rangle = 0$ y $\langle z, d \rangle = 0$ (tomando por ejemplo $\lambda = 0$ y luego $\lambda = 1$ en la ecuación). Es decir z es ortogonal a p y d y de esto concluimos que debe ser paralelo a $p \times d$, es decir $z \in L_2$.

iii) L es la recta con vector $p \times d$ por lo que $L^\perp$ es el plano con vector normal $p \times d$ que pasa por el origen. Este plano es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ que contiene a los vectores p y d y como éstos son l.i. son base del plano $L^\perp$. En conclusión $p = (1, 0, 0)$ y $d = (1, -1, 1)$ son base de $L^\perp$.

Puntaje.

a i) 0.3 por plantear el escalonamiento de una buena matriz (la de la pauta, o su traspuesta dependiendo de cómo se resuelva)

0.3 por escalonar correctamente

0.4 por encontrar los vectores l.i.

ii) 0.3 por plantear alguna idea razonable. Puede ser por ejemplo buscar dos vectores completamente distintos de v_1 y v_2, pero: ambos vectores nuevos deben ser combinaciones de v_1 y v_2 (o los que sean ques e hayan encontrado como base) y ortogonales entre sí.

0.7 por el resto del argumento

iii) 0.3 Por el sistema de ecuaciones que describa la situación $x \in \langle \{v_1, v_2\} \rangle^\perp$.

0.4 por resolver el sistema anterior

0.3 dar una base del conjunto solución

b) i) 0.2 por la respuesta correcta

0.3 por el argumento

ii) 0.7 por $L_2 \subset S$

0.8 por $S \subset L_2$

Nota: en esta pauta se define L_2 de manera explícita. Aunque en una prueba esto no es necesario, las dos inclusiones de conjuntos o al menos algo equivalente deben estar presentes en el argumento. El puntaje se asigna por estas ideas, no por la definición explícita.

iii) 0.5 por decir que $L^\perp$ se trata de un plano que pasa por el origen y con vector normal $p \times d$.

0.5 por la base

P3.- Usaremos la notación $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ para el conjunto de matrices de $n \times n$ con coeficientes en $\mathbb{R}$. Si $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ y V es un subespacio vectorial (s.e.v.) de $\mathbb{R}^n$ se define

$$A(V) = \{Ax : x \in V\}.$$

a) i) (1 pto.) Pruebe que si $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ y V es s.e.v. de $\mathbb{R}^n$ entonces $A(V)$ también es s.e.v. de $\mathbb{R}^n$.

ii) (1.5 ptos.) Sean V, W s.e.v de $\mathbb{R}^n$ tales que $V \oplus W = \mathbb{R}^n$. Pruebe que si $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ es invertible entonces $A(V) \oplus A(W) = \mathbb{R}^n$.

iii) (1.5 ptos.) Sean V, W s.e.v de $\mathbb{R}^n$ tales que $V \oplus W = \mathbb{R}^n$. Muestre que si $A(V) \oplus A(W) = \mathbb{R}^n$ entonces A es invertible.

Indicación: pruebe que para todo $z \in \mathbb{R}^n$ el sistema $Ax = z$ tiene solución.

b) i) (1 pto.) Sea W un s.e.v de $\mathbb{R}^n$ y definamos $E = \{A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R}) : A(\mathbb{R}^n) \subset W\}$. Muestre que E es un s.e.v. de $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$.

ii) (1 pto.) Sea $W = \{(t, t) : t \in \mathbb{R}\}$. Calcule la dimensión de $E = \{A \in \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R}) : A(\mathbb{R}^2) \subset W\}$.

Pauta.

a) i) Sean y_1, $y_2 \in A(V)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces existen v, $w \in V$ tales que $y_1 = Av$ y $y_2 = Aw$. Como V es s.e.v. de $\mathbb{R}^n$ tenemos que $v + \lambda w \in V$y concluimos que $y_1 + \lambda y_2 = Av + \lambda Aw = A(v + \lambda w) \in A(V)$.

ii) Debemos probar que $A(V) + A(W) = \mathbb{R}^n$ y $A(V) \cap A(W) = \{0\}$.

$\underline{A(V) + A(W) = \mathbb{R}^n}$. Sea $z \in \mathbb{R}^n$. Como A es invertible el sistema $Ax = z$ tiene solución $x \in R^n = V \oplus W$. Luego $x = v + w$ con $v \in V$, $w \in W$. Entonces $z = Ax = A(v+w) = Av + Aw \in A(V) + A(W)$.

$\underline{A(V) \cap A(W) = \{0\}}$. Sea z un elemento cualquiera de $A(V) \cap A(W)$. Como $z \in A(V)$ existe $v \in V$ tal que $z = Av$ y de $z \in A(W)$ deducimos que existe $w \in W$ tal que $z = Aw$. Entonces $A(v - w) = Av - Aw = z - z = 0$. Como A es invertible esto implica que $v = w$. Así $v \in V \cap W$ y por hipótesis este último espacio es trivial. Luego $v = 0$ y entonces $z = 0$.

iii) Siguiendo la indicación, veremos que para todo $z \in \mathbb{R}^n$ el sistema $Ax = z$ tiene una solución. En efecto, si $z \in \mathbb{R}^n$ gracias a la hipótesis $A(V) \oplus A(W) = \mathbb{R}^n$ podemos escribir $z = y_1 + y_2$ con $y_1 \in A(V)$ e $y_2 \in A(W)$. Por consiguiente existen $v \in V$ y $w \in W$ tales que $y_1 = Av$ e $y_2 = Aw$. Entonces $z = Av + Aw = A(v + w)$. Esto prueba lo que queríamos e implica que A es invertible.

Observemos que para esta parte del problema solo es necesario suponer que $A(V) + A(W) = \mathbb{R}^n$.

b) i) Sean A, $B \in E$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Debemos probar que la matriz $A + \lambda B \in E$. Esto último se verifica si $(A + \lambda B)(\mathbb{R}^n) \subset W$. Para probar esto consideremos $x \in \mathbb{R}^n$ arbitrario y demostremos que $(A + \lambda B)x \in W$. Pero $(A + \lambda B)x = Ax + \lambda Bx$. Como A, $B \in E$ sabemos que $Ax \in W$ y $Bx \in W$ y sabiendo que W es s.e.v de $\mathbb{R}^n$ podemos afirmar que $Ax + \lambda Bx \in W$.

ii) En este ejercicio $n = 2$ y W es el subespacio de $\mathbb{R}^2$ generado por el vector $(1, 1)$. Para calcular la dimensión de $E = \{A \in M_{22}(\mathbb{R}) : A(\mathbb{R}^2) \subset W\}$ debemos encontrar una base de este s.e.v. de $\mathcal{M}_{22}(\mathbb{R})$. Sea $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R})$ y veamos bajo qué condiciones (sobre los coeficientes) se cumple $A \in E$. Por definición de E se tiene $A \in E$ si (y solamente si) $A(\mathbb{R}^2) \subset W$. Pero $A(\mathbb{R}^2)$ es el s.v.e. de $\mathbb{R}^2$

$$A(\mathbb{R}^2) = \{Ax : x \in R^2\}.$$

Escribiendo $x = (x_1, x_2)$ tenemos

$$Ax = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Entonces $A \in E$ si <u>para todo</u> x_1, $x_2 \in \mathbb{R}$ se cumple

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} \in W$$

Eligiendo $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ deducimos que $\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} \in W$ y esto fuerza $a_{11} = a_{21}$. Similarmente tomando $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ debemos tener $\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} \in W$ y luego $a_{12} = a_{22}$. Deducimos que $A \in E$ si y solamente si A tiene la forma

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ a & b \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Estas dos últimas matrices son l.i. por lo que hemos descubierto una base de E, y en conclusión la dimensión de E es 2.

Puntaje.

a) i) 0.2 por la compresión de s.e.v.
0.8 resto

ii) 0.8 por $A(V) \oplus A(W) = \mathbb{R}^n$.
0.7 por $A(V) \cap A(W) = \{0\}$.

iii) 1

b) i) 1

ii) 0.2 por plantear la idea de buscar restricciones en los coeficientes de A
0.2 por reconocer la utilidad de la fórmula (2)
0.6 resto