Pauta Control #5 MA11A Álgebra

Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile.
Semestre Primavera 2005

El objetivo de esta pauta es orientar la corrección de los ayudantes y dar al alumno una guía de estudio. Es *responsabilidad del alumno* tener una copia de esta pauta para el día de la revisión de su prueba. Esta se puede obtener en la página:
`http://www.dim.uchile.cl/~lmella/MA11A.html` en formato ps o pdf.

Pregunta 1. Sea E el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

a) (2 ptos.) Encuentre una base de E y la dimensión de E.

b) (2 ptos.) Encuentre una base de $E^{\perp}$ y la dimensión $E^{\perp}$.

c) (2 ptos.) Para el vector $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$ encuentre $v \in E$ y $w \in E^{\perp}$ tales que $x = v + w$. Explicite las coordenadas de v y w en función de x_1, x_2, x_3, x_4.

Pauta.

a) Encontremos una colección l.i. de entre los vectores que aparecen en el enunciado.

$$\begin{array}{rrrr} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

son l.i. y generan E.

b) Tenemos que $x \in E^{\perp}$ si y sólo si $\langle v_1, x\rangle = 0$ y $\langle v_2, x\rangle = 0$. Escribiendo

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

tenemos

$$\begin{aligned} \langle v_1, x\rangle = 0 &\Longleftrightarrow x_1 - x_2 - x_4 = 0 \\ \langle v_2, x\rangle = 0 &\Longleftrightarrow x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{aligned}$$

Resolviendo

$$\begin{aligned} x_2 &= x_3 + x_4 \\ x_1 = x_2 + x_4 = x_3 + x_4 + x_4 &= x_3 + 2x_4 \end{aligned}$$

Una base $E^{\perp}$ viene dada por

$$w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad w_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

c)

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Queremos escribir $x = v + w$, donde

$$v \quad = \quad \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \qquad w = \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2$$

Así

$$x \quad = \quad \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2$$

Haciendo producto con v_1

$$\langle x, v_1\rangle = \alpha_1 \langle v_1, v_1\rangle = \alpha_1 3 \quad \alpha_1 = \frac{1}{3}(x_1 - x_2 - x_4)$$

Producto con v_2

$$\langle x, v_2\rangle = \alpha_2 \langle v_2, v_2\rangle = \alpha_1 3 \quad \alpha_2 = \frac{1}{3}(x_2 - x_3 - x_4)$$

Luego

$$v = \frac{1}{3}(x_1 - x_2 - x_4) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad + \frac{1}{3}(x_2 - x_3 - x_4) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} x_1 & -x_2 & -x_4 & 0 \\ -x_1 & +x_2 & +x_4 & +x_2 - x_3 - x_4 \\ 0 & -x_2 & +x_3 & +x_4 \\ -x_1 & +x_2 & +x_4 & -x_2 + x_3 + x_4 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} x_1 & -x_2 & -x_4 \\ -x_1 & +2x_2 & -x_3 \\ -x_2 & +x_3 & +x_4 \\ -x_1 & +xx_3 & +2x_4 \end{bmatrix}$$

Podemos encontrar w calculando

$$w = x - v = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2x_1 & +x_2 & +x_4 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 \\ x_2 & +2x_3 & -x_4 \\ x_1 & -x_3 & +x_4 \end{bmatrix}$$

Puntaje.

a) 0,5 plantear un sistema que permita encontrar vectores l.i.

1,2 aplicar pivoteo al sistema anterior

0,3 respuesta correcta

b) 0,5 plantear cómo encontrar una base de E mediante sistema de ecuaciones o método de Gram-Schmidt

1,2 resolver el sistema o utilizar Gram-Schmidt

0,3 respuesta correcta

c) Hay varios métodos para resolver esta parte. En la pauta se sugiere utilizar relaciones de ortogonalidad de los vectores v y w, pero también es posible plantear el problema así:

sean v_1, v_2 base de E, w_1, w_2 base de $E^\perp$. Entonces buscamos a_1, a_2, a_3, a_4 tales que $x = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3w_1 + a_4w_2$ y resolver este sistema utilizando pivoteo. Luego $v = a_1v_1 + a_2v_2$, $w = a_3w_1 + a_4w_2$.

En cualquier caso una solución debe pasar por:

0,7 plantear el problema como el de encontrar constantes adecuadas

0,8 resolver las constantes (pivoteo, o como se hizo en la pauta, utilizando ortogonalidad)

0,5 formulas para v y w

Pregunta 2.

a) Denotemos por $\mathcal{P}_k$ el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que k.

i) (1 pto.) Sea $L : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_4$ definida por $L(p(x)) = p(x)(x^2 + 1)$. Muestre que L es lineal.

ii) (1,5 ptos.) Encuentre una base y dimensión de $ker(L)$ e $Im(L)$ (Nota: $ker(L) = N(L)$ es el núcleo de L.)

En adelante $V = Im(L)$.

iii) (1,5 ptos.) Pruebe que $\mathcal{P}_1 \cap V = \{0\}$.

iv) (1 ptos.) Calcule $\dim(\mathcal{P}_1 \oplus V)$ y deduzca que $\mathcal{P}_1 \oplus V = \mathcal{P}_4$.

b) (1 pto.) Sean U, V subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^n$. Demuestre que

$$(U + V)^\perp = U^\perp \cap V^\perp.$$

Pauta.

a) i) L es lineal. Para $p(x), q(x) \in \mathcal{P}_2$

$$\begin{aligned} L(p(x)+\lambda q(x)) &= (p(x)+\lambda q(x))(x^2+1) \\ &= p(x)(x^2+1)+\lambda q(x)(x^2+1) \\ &= L(p(x)+\lambda(q(x)) \end{aligned}$$

ii) Encontremos $ker(L)$. Se tiene $p(x) \in ker(L)$.

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow L(p(x)) &= 0 \\ \Leftrightarrow p(x)(x^2+1) &= 0 \\ \Leftrightarrow p(x) &= 0 \end{aligned}$$

Así $ker(L) = \{0\}$ y tiene dimensión 0

Encontremos $Im(L)$. Tenemos que

$$Im(L) = \{q(x) \in \mathcal{P}_4 \,|\, \text{existe } p(x) \in \mathcal{P}_2 \text{ con } q(x) = p(x)(x^2+1)\}$$

Escribamos $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow L(p(x)) &= (a_0+a_1x+a_2x^2)(x^2+1) \\ &= a_0x^2+a_0+a_1x^3+a_1x+a_2x^4+a_2x^2 \\ &= a_0+a_1x+(a_0+a_2)x^2+a_1x^3+a_2x^4 \end{aligned}$$

Luego $Im(L)$ está generada por

$$\begin{aligned} q_1(x) &= 1+x^2 \qquad (a_0=1, a_1=0, a_2=0) \\ q_2(x) &= x+x^3 \qquad (a_0=0, a_1=1, a_2=0) \\ q_3(x) &= x^2+x^4 \qquad (a_0=0, a_1=0, a_2=1) \end{aligned}$$

Veamos que estos vectores son l.i. Supongamos que

$$a_1(1+x^2)+a_2(x+x^3)+a_3(x^2+x^4) = 0.$$

Entonces rehaciendo el cálculo anterior

$$(a_0+a_1x+a_2x^2)(x^2+1) = a_0(1+x^2)+a_1(x+x^3)+a_2(x^2+x^4) = 0$$

y esto muestra que $a_0+a_1x+a_2x^2 = 0$ de donde $a_0 = a_1 = a_2 = 0$.

Otra forma de argumentar es que sabiendo que L es inyectiva (pues su ker es nulo), L manda una base en una base.

Así $q_1(x), q_2(x), q_3(x)$ es base de $Im(L)$ y este espacio tiene dimensión 3.

iii) Sea $V = Im(L)$ y $q \in \mathcal{P}_1 \cap V$. Entonces como $q \in \mathcal{P}_1$

$$q(x) = b_0 + b_1x \tag{1}$$

y como $q \in V$

$$q(x) = a_0(1+x^2)+a_1(x+x^3)+a_2(x^2+x^4) = a_0+a_1x+(a_0+a_2)x^2+a_1x^3+a_2x^4.$$

Por (1) los coeficientes de x^2, x^3, x^4 tienen que ser cero, es decir

$$a_0+a_2 = 0, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 0.$$

De aquí vemos que $a_1 = 0$, $a_2 = 0$ y luego $a_0 = 0$. Así $q(x) = 0$.

iv) Como $\mathcal{P}_1 \cap V = \{0\}$ tenemos $dim(\mathcal{P}_1 + V) = dim\mathcal{P}_1 + dimV = 2+3 = 5$.

$\mathcal{P}_1 \oplus V$ es *sev* de $\mathcal{P}_4$ y $dim(\mathcal{P}_4) = 5$ luego $\mathcal{P}_1 \oplus V = \mathcal{P}_4$.

b) Tenemos que probar que $(U+V)^\perp = U^\perp \cap V^\perp$.

Sea $x \in U^\perp \cap V^\perp$. Por definición tenemos

$$\begin{aligned}\langle x, u\rangle &= 0 \quad \forall u \in U\\ \langle x, v\rangle &= 0 \quad \forall v \in V\end{aligned}$$

Sea $w = U + V$. Entonces $w = u + v$ para algún $u \in U, v \in V$. Luego

$$\begin{aligned}\langle x, w\rangle = \langle x, y+v\rangle &= \langle x, u\rangle + \langle x, v\rangle\\ &= 0\end{aligned}$$

lo que muestra que $x \in (U+V)^\perp$.

Sea ahora $x \in (U+V)^\perp$. Entonces $\langle x, w\rangle = 0 \forall w \in U+V$. Si $u \in U$, entonces $u \in U+V$ y por lo tanto $\langle x, u\rangle = 0$. Luego $x \in U^\perp$. Similarmente, todo $v \in V$ cumple $v \in U+V$ y entonces $\langle x, v\rangle = 0$. Vemos que $x \in V^\perp$, y por lo tanto $x \in U^\perp \cap V^\perp$.

Pauta.

a) i) 0,4 saber la definición de función lineal lineal
   0,6 calcular correctamente

   ii) 0,2 plantear la condición que un polinomio $p(x)$ está en $ker(L)$
   0,3 obtener $ker(L) = 0$
   0,1 $dim(ker(L)) = 0$
   0,8 base de $Im(L)$
   0,1 $dim(Im(L))$

   iii) 0,5 plantear la condición que $p(x)$ está en la intersección
   1,0 argumentar que $p(x) = 0$

   iv) 0,4 $dim(E+F) = dim(E) + dim(F) - dim(E \cap F)$
   0,4 deducir de aquí que $dim(\mathcal{P}_1 + V) = 5$
   0,2 $\mathcal{P}_1 + V = \mathcal{P}_4$

a) Esto normalmente se hace probando dos inclusiones $(U+V)^\perp \subseteq U^\perp \cap V^\perp$ y la recíproca.

0,6 por cada inclusión 0,3

0,2 conocer la definición de $U^\perp$

0,2 manejo de producto interno

Pregunta 3.

a) (2 ptos.) Sean V, W espacios vectoriales reales y $T : V \to W$ una función lineal. Sea $\{u_1, \ldots, u_k\} \subseteq V$ un conjunto linealmente independiente. Pruebe que los vectores $T(u_1), \ldots, T(u_k)$ son l.i. si y sólo si $\langle\{u_1, \ldots, u_k\}\rangle \cap \ker(T) = \{0\}$.

b) Sea $M_{n,n}$ el espacio vectorial de las matrices de $n \times n$ con coeficientes reales. Considere

$$E = \left\{A = (a_{i,j})_{i,j} \in M_{n,n} \,|\, \text{existe } c \in \mathbb{R} \text{ tal que } \textstyle\sum_{j=1}^n a_{i,j} = c \text{ para todo } 1 \le i \le n\right\}$$
$$E_0 = \left\{A = (a_{i,j})_{i,j} \in M_{n,n} \,|\, \text{ tal que } \textstyle\sum_{j=1}^n a_{i,j} = 0 \text{ para todo } 1 \le i \le n\right\}.$$

(Observe que para las matrices de E la suma de sus elementos por fila es constante.)

i) (1 pto.) Pruebe que E es subespacio vectorial de $M_{n,n}$.

ii) (1 pto.) Muestre que E_0 es subespacio vectorial de E.

iii) (1 pto.) Para el caso $n = 3$ encuentre una base y dé la dimensión de E_0.

iv) (1 pto.) Para el caso $n = 3$ encuentre una base y dé la dimensión de E.

Pauta.

a) Supongamos que $T(u_1), ..., T(u_k)$ son l.i. y sea $u \in \langle\{u_1, ..., u_k\}\rangle \cap ker(T)$. Entonces $T(u) = 0$ y $u = \sum_{i=1}^{k} a_i u_i \quad a_i \in \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow 0 = T(u) = T(\sum_{i=1}^{k} a_i u_i) = \sum_{i=1}^{k} a_i T(u_i).$$

Como $T(u_1), ..., T(u_k)$ son l.i. deducimos $a_i = 0$ para $1 \leq i \leq k$. Luego $u = 0$.
Supongamos ahora que $\langle\{u_1, ..., u_k\}\rangle \cap ker(T) = \{0\}$ y probemos que $T(u_1), ..., T(u_k)$ son l.i. Hay que demostrar que si $\sum_{i=1}^{k} a_i T(u_i) = 0$ entonces $a_i = 0 \; \forall 1 \leq i \leq k$.

Si $\sum_{i=1}^{k} a_i T(u_i) = 0$, entonces $T(\sum_{i=1}^{k} a_i u_i) = 0$ y luego $\sum_{i=1}^{k} a_i u_i \in ker(T)$. Pero siempre se tiene $\sum_{i=1}^{k} a_i u_i \in \langle\{u_1, ..., u_k\}\rangle$ y entonces, por hipótesis $\sum_{i=1}^{k} a_i u_i = 0$. Como $u_1, ..., u_k$ son l.i., vemos que

$$a_i = 0, \forall 1 \leq i \leq k.$$

b) i) Sean $A = (a_{ij})_{ij}$, $B = (b_{ij})_{ij}$, $A, B \in E, \lambda \in \mathbb{R}$.
Como $A \in$ existe $c_1 \in \mathbb{R}$ tal que, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = c_1$, y como $B \in E$ también existe $c_2 \in \mathbb{R}$ tal que $\sum_{j=1}^{n} b_{ij} = c_2$. Luego

$$\sum_{j=1}^{n} (A + \lambda B)_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} + \lambda b_{ij}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} + \lambda \sum_{j=1}^{n} b_{ij} = c_1 + \lambda c_2 \quad 1 \leq i \leq n$$

y vemos que $A + \lambda B \in E$.

ii) Claramente $E_0 \subseteq E$. Sean $A = (a_{ij})_{ij} \in E_0$, $B = (b_{ij})_{ij} \in E_0$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\sum_{j=1}^{n} (A + \lambda B)_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} + \lambda b_{ij}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} + \lambda \sum_{j=1}^{n} b_{ij} = 0,$$

por lo que $A + \lambda B \in E_0$.

iii) Las siguientes matrices están en E_0

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad A_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

y son claramente l.i.

Estos vectores generan E_0 ya que si $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq 3_{1 \leq j \leq 3}}$

$$A = a_{11}A_1 - a_{13}A_2 + a_{21}A_3 - a_{23}A_4 + a_{31}A_4 - a_{33}A_6$$

Por ejemplo, la componente $(1, 2)$ del lado derecho queda $-a_{11} - a_{13}$. Como $A \in E_0$ tenemos $a_{11} + a_{12} + a_{13} = 0$ y así $-a_{11} - a_{13} = a_{22}$.

Concluimos que $dimE = 6$.

iv) Una base de E es $A_1, ..., A_6$ de la parte iii) y el vector

$$A_7 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Nuevamente $\{A_1, ..., A_7\}$ es l.i. y para verificar que estos matrices generan E sea $A \in E$ y $c \in \mathbb{R}$ tal que $\sum\limits_{j=1}^{3} a_{i,j} = c$, $1 \leq i \leq 3$. Así $A - \frac{c}{3}A_7 \in E_0$ y luego

$$\begin{aligned} A - \frac{c}{3}A_7 &= \sum_{k=1}^{6} \alpha_k A_k \\ A &= \frac{c}{3}A_7 + \sum_{k=1}^{6} \alpha_k A_7. \end{aligned}$$

Finalmente la dimensión de E es 7.

Pauta.

a) 0,6 por cada implicancia 0,3

0,2 manejo del concepto de función lineal

0,2 manejo del concepto de independencia lineal

b) i) 0,5 definición de subespacio

0,5 argumento

ii) 0,2 argumento que diga primero que E_0 es subconjunto de E

0,8 resto del argumento

iii) 0,5 dar una base (si la base no es correcta, pero le falta poco, dar .... 0,3)

0,1 justificar que es l.i (basta decir que claramente es l.i. si es así)

0,4 justificar que genera

iv) 0,5 dar una base (si la base no es correcta, pero le falta poco, dar .... 0,3)

0,1 justificar que es l.i (basta decir que claramente es l.i. si es así)

0,4 justificar que genera