Pauta Control 5 MA11A ALGEBRA
Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile
Semestre-2

Problema 1

a) Considere la función $T : \mathbb{R}^4 \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definida por

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x & y+w \\ 2x+2y+z+w & x+y+z \end{bmatrix}$$

i) Demuestre que T es función lineal.

Se debe probar que $\forall u_1, u_2 \in \mathbb{R}^4, \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$$T(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) = \lambda_1 T(u_1) + \lambda_2 T(u_2) \text{ en que } u_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ u_1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

$$T(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) = T\left(\lambda_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ w_1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ w_2 \end{pmatrix}\right) = T\begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \\ \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \\ \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 \\ \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 & \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 \\ 2(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + 2(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) & \lambda_1 x_1 + \lambda_1 x_2 + \lambda y_1 + \lambda_1 y_2 \\ +\lambda_1 z_1 + \lambda_1 z_2 + \lambda_1 w_1 + \lambda_1 w_2) & +\lambda_1 z_1 + \lambda_1 z_2 \end{bmatrix} =$$

(0.5 ptos.)

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 & \lambda_1(y_1 + w_1) + \lambda_2(y_2 + w_2) \\ \lambda_1(2x_1 + 2y_1 + z_1 + w_1) & \lambda_1(x_1 + y_1 + z_1) \\ +\lambda_2(2x_2 + 2y_2 + z_2 + w_2) & +\lambda_2(x_2 + y_2 + z_2) \end{bmatrix}$$

(0.5 ptos.)

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 x_1 & \lambda_1 x_2 \\ \lambda_1(2x_1 + 2y_1 + z_1 + w_1) & \lambda_1(x_1 + y_1 + z_1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_2 x_2 & \lambda_2(y_2 + w_2) \\ \lambda_2(2x_1 + 2y_2 + z_2 + w_2 & \lambda_2(x_2 + y_2 + w_2) \end{bmatrix}$$

$$= \lambda_1 \begin{bmatrix} x_1 & y_1 + w_1 \\ 2x_1 + 2y_1 + z_1 + w_1 & x_1 + y_1 + z_1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} x_2 & y_2 + w_2 \\ 2x_2 + 2y_2 + z_2 + w_2 & x_2 + y_2 + z_2 \end{bmatrix}$$

$$= \lambda_1 T \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ w_1 \end{pmatrix} + \lambda_2 T \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ w_2 \end{pmatrix} = \lambda_1 T(u_1) + \lambda_2 T(u_2)$$

(0.5 ptos.)

ii) Determine bases y dimensiones para $Ker(T)$ e $Im(T)$.

Para determinar una base de $KerT$ se sabe que $u \in Ker(T) \Rightarrow T(u) = 0$. Sea

$$u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4, T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x & y+w \\ 2x+2y+z+w & x+y+z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

de donde

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ y+w &= 0 \\ 2x+2y+z+w &= 0 \\ x+y+z &= 0 \end{aligned}$$

y matricialmente

$$\begin{pmatrix} 1\,0\,0\,0 \\ 0\,1\,0\,1 \\ 2\,2\,1\,1 \\ 1\,1\,1\,0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

se puede escalonar o directamente (0.5 ptos.)

Escalonando

$$\begin{bmatrix} 1\,0\,0\,0 \\ 0\,1\,0\,1 \\ 2\,2\,1\,1 \\ 1\,1\,1\,0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1\,0\,0\,0 \\ 0\,1\,0\,1 \\ 0\,2\,1\,1 \\ 0\,1\,1\,0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1\,0\,0 & 0 \\ 0\,1\,0 & 1 \\ 0\,0\,1 & -1 \\ 0\,0\,1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1\,0\,0 & 0 \\ 0\,1\,0 & 1 \\ 0\,0\,1 & -1 \\ 0\,0\,0\,0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ y+w &= 0 \\ z-w &= 0 \\ w &= w \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x &= 0 \\ y &= -w \\ z &= w \\ w &= w \end{aligned}$$

Entonces $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = w \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ de donde $KerT = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$ y $dim(Ker(T)) = 1$

(1.0 pto.)

Para encontrar una base de $Im(T)$, se sabe que por TNI

$$dim\mathbb{R}^4 = dimKer(T) + dimIm(T) \Rightarrow 4 = 1 + dimImT \Rightarrow dimIm(T) = 3$$

(0.5 ptos.)

Una forma es proceder como sigue:

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x & y+w \\ 2x+2y & x+y+z \\ +z+w & \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + w\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

en donde las cuatro matrices de la derecha generan $Im(T)$ y debemos encontrar tres de ellas $\ell.i.(dim(Im(T)) = 3)$. Por ejemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

son $\ell.i.$ pues

$$\alpha\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \gamma\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$. Entonces

$$Im(T) = \langle\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right\}\rangle$$

y $dimImT = 3$ (1.0 pto.)

OBS.: Existen otras soluciones, pero

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

son $\ell.d.$

b) Dado $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ y $Ker(L) = \langle\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}\rangle$ y $L\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ encuentre en términos de x_1, x_2, x_3, los valores de y_1 e y_2 que satisfacen

$$L\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

La base del $KerT$: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ junto a $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ constituyen una base de $\mathbb{R}^3$ pues son $\ell.i.$ Entonces

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{rl} \alpha + \beta + \gamma & = x_1 \\ \beta + \gamma & = x_2 \\ \gamma & = x_3 \end{array}$$

de donde $\gamma = x_3, \beta = x_2 - x_3, \alpha = x_1 - x_3 - (x_2 - x_3) = x_1 - x_2$.

(1.0 pto.)

Sigue que $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (x_1 - x_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (x_2 - x_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (x_1 - x_2) T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (x_2 - x_3) T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

pues T es Translineal y además $T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ (vectores del $KerT$) $\wedge T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Entonces $T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

(1.0 pto.)

Problema 2

$$W = \{M \in M_{3\times3}(\mathbb{R}) / M = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & e & c \\ 0 & c & i \end{pmatrix} \wedge a+e+i=0, a,b,c,e,i \in \mathbb{R}\}$$
$$U = \{M \in M_{3\times3}(\mathbb{R}) / M = \begin{pmatrix} 0 & r & s \\ r & 0 & 0 \\ s & 0 & 0 \end{pmatrix} r,s \in \mathbb{R}\}$$

a) Demuestre que W y V son subespacios vectoriales de $M_{3\times3}(\mathbb{R})$

Para W: Si $u_1, u_2 \in W \wedge \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, por demostrar que $(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) \in W$. Sean

$$u_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ b_1 & e_1 & c_1 \\ 0 & c_1 & i_1 \end{pmatrix} \text{ con } a_1+e_1+i_1=0 \wedge u_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & 0 \\ b_2 & e_2 & c_2 \\ 0 & c_2 & i_2 \end{pmatrix} \text{ con } a_2+e_2+i_2=0$$

Entonces

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 & \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 & 0 \\ \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 & \lambda_1 e_1 + \lambda_2 c_2 & \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 \\ 0 & \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 & \lambda_1 i_1 + \lambda_2 i_2 \end{pmatrix}$$

con $(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2) + (\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2) + (\lambda_1 i_1 + \lambda_2 i_2) = \lambda_1(a_1+e_1+i_1) + \lambda_2(a_2+e_2+i_2) = \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 0 = 0$. Entonces $(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) \in W$.

(1.5 ptos.)

Para U: Sean

$$v_1, v_2 \in V \text{ tal que } v_1 = \begin{pmatrix} 0 & r_1 & s_1 \\ r_1 & 0 & 0 \\ s_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \wedge v_2 = \begin{pmatrix} 0 & r_2 & s_2 \\ r_2 & 0 & 0 \\ s_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Asi,

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 & \lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2 \\ \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 & 0 & 0 \\ \lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si $\lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 = p$ y $\lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2 = q \Rightarrow \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \begin{pmatrix} 0 & p & q \\ p & 0 & 0 \\ q & 0 & 0 \end{pmatrix} \in U$

(0.5 ptos.)

b) Encuentre bases y dimensiones para los subespacios $U, W, U \cap W$ y $U + W$ y decida si la suma $U + W$ es directa.

¿Cuantos vectores es preciso agregar a una base de $U+W$ para obtener una base de $S=\{M\in M_{3\times 3}(\mathbb{R})/M$ es simétrica $\}$. Justifique encontrando una base de S.

Base para W.

Cualquier vector de W puede escribirse como

$$\begin{pmatrix} a & b & 0\\ b & e & c\\ 0 & c & i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b & 0\\ b & e & c\\ 0 & c & -a-e\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$+b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}+e\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

Las cuatro matrices de la derecha generan W y además son $\ell.i.$ pués

$$\alpha\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$+\delta\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow \alpha=\beta=\gamma=\delta=0$$

Entonces

$$W=\langle\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0-1 & \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\right\}\rangle \wedge dimW=4$$

(1.0 pto.)

Base para U

$$\begin{pmatrix} 0 & r & s\\ r & 0 & 0\\ s & 0 & 0\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Es inmediato que

$$U=\langle\left\{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\right\}\rangle \text{ y } dimU=2$$

(0.5 ptos.)

Base para $U\cap W$

Es inmediato que $U\cap W=\{M\in M_{3\times 3}/M=\begin{pmatrix} 0 & \lambda & 0\\ \lambda & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\}$ pués M contiene los ceros comunes a las matrices de ambos subespacios, es simétrica y de traza nula $(a+e+i=$

$0+0+0=0$). Entonces

$$\begin{pmatrix} 0 & \lambda & 0 \\ \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow U \cap W = \langle \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \rangle \text{ y } dim(U \cap W) = 1$$

y por lo tanto $U \cap W \neq \{0\}$.

Una conclusión inmediata es que $U+W$ "no es suma directa". Recordar que $V = U \oplus W \Leftrightarrow (V = U+W) \wedge (U \cap W = \{0\}$

(1.0 pto.)

Base para $U+W = \{M \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})/M = \begin{pmatrix} a & b+r & s \\ b+r & e & c \\ s & c & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \lambda & s \\ \lambda & e & c \\ s & c & i \end{pmatrix} a+e+i=0\}$

Sigue que

$$= \begin{pmatrix} a & \lambda & s \\ \lambda & e & c \\ s & c & a-e \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+s \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

donde las matrices de la derecha son $\ell.i.$ y constituyen la base de $U+W$. Además $dim(U+W) = 5$ que también puede verificarse con $dim(U+W) = dimU + dimW - dim(U \cap W) = 2+4-1 = 5$

(1.0 pto.)

Finalmente, $S = \{M \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})/M$ es imétrica $\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} \right\}$ de donde

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+d \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

en que las matrices de la derecha son $\ell.i.$. Así, $dimS = 6$, de modo que a la base de $U+W(dim(U+W) = 5)$ bastará agregarle 1 vector para obtener una base de S.

(0.5 ptos.)

Problema 3

a) Dada la recta $L : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, encuentre una base ortonormal del plano π perpendicular a L que pasa por el origen.

Como $L \perp \pi$ un vector normal del plano π será el vector director de $L : \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Además un punto posición de π es el origen $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

La ecuación normal de π es $\langle v - p, n \rangle = 0$ con $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $n = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Entonces $\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = 0 \Rightarrow x + 2y + z = 0$ es la ecuación cartesiana de π que puede escribirse vectorialmente si $x = \alpha, y = \beta, z = -\alpha - 2\beta$.

(0.5 ptos.)

Así $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ es la ecuación vectorial de π donde $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$ es una base de π.

(0.5 ptos.)

Pero obtener la base ortonormal aplicamos Gram Schmidt.

Sean $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, entonces para la base ortonormal $\{w_1, w_2\}$ tomamos

$w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ y

$$\begin{aligned} \tilde{w}_2 = v_2 - \langle v_2, w_1 \rangle w_1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\tilde{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ y } w_2 = \frac{\tilde{w}_2}{\|\tilde{w}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Así, la base ortonormal de π es $\langle w_1, w_2\rangle = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

(1.0 pto.)

b) Sea U un espacio vectorial de dimensión finita y $T : U \to U$ una transformación lineal. Demuestre que:

i) $T \circ T = 0 \Leftrightarrow Im(T) \subseteq Ker(T)$

ii) $Im(T) = Ker(T) \Leftrightarrow dim(U) = 2dim(Ker(T))$ y $Im(T) \subseteq Ker(T)$.

i) $(\Rightarrow)\forall u \in U, T(u) \in Im(T)$ y por hipótesis $T(Tu) = (T \circ T)u) = 0$

$\Rightarrow T(u) \in Ker(T)$. Entonces $Im(T) \subseteq Ker(T)$.

(0.7 ptos.)

$(\Leftarrow)$ Sea $u \in U \Rightarrow T(u) \in Im(T) \Rightarrow T(u) \in Ker(T)$ pués por hipótesis $Im(T) \subseteq Ker(T)$. Entonces $T(T(u)) = (T \circ T)(u) = 0$, es decir $T \circ T = 0$.

(0.8 ptos.)

ii) $(\Rightarrow)$ Se sabe que $dimU = dim(Im(T)) + dim(Ker(T))$ (TNI) y por hipótesis

$Im(T) = Ker(T)$ de donde $dim(Im(T)) = dimKer(T)$.

Entonces $dimU = dim(Ker(T)) + dim(Ker(T)) = 2dimKer(T)$ y $Im(T) \subseteq Ker(T)$

(inmediato de $Im(T) = Ker(T)$ por hopótesis).

(0.7 ptos.)

$(\Leftarrow)$ Por hipótesis $dimU = 2dim(Ker(T))$ y como $dimU = dimImT + dimKerT$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad 2dim(Ker(T)) = dim(Im(T)) + dimKer(T) \\ &\Rightarrow \quad dim(Ker(T)) = dim(Im(T)) \end{aligned}$$

y además (hipt) $Im(T) \subseteq Ker(T)$ y como tienes igual dimensión $Im(T) = Ker(T)$.

(0.8 ptos.)

c) Encontrar todas las transformaciones lineales$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tales que

$Ker(T) = \langle\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\rangle$ y $Im(T) = Ker(T)$.

Debemos encontrar $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ para $\forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

Podemos escribir $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Así, $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T(x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = xT\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + yT\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(0.5 ptos.)

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in KerT \Rightarrow T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ y $T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in ImT$ pero $ImT = KerT$ (hip).

Entonces $T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in KerT \Rightarrow T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ pués $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ es base de $Ker(T)$.

Así $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = yT\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = y \cdot \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}$

por lo tanto las transformaciones son $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0.$

(0.5 ptos.)