Pauta Control 6, MA11A Algebra
13 Noviembre, 2003

Problema 1:

(1) Considere la matriz $A \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Pruebe que el polinomio característico de A es

$$p(\lambda) = (1-\lambda)^3(5-\lambda).$$

(2 ptos.)

(b) De una base ortonormal de $\mathbb{R}^4$, formada por vectores propios de A.

(2 ptos.)

(2) Considere la matriz $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, donde

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

con $a, b, c, d > 0$. Pruebe que A es diagonalizable.

(2 ptos.)

Solución:

(1) (a) Recordemos que el polinomio característico está dado por

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I).$$

Luego, utilizando operaciones elementales se tiene que

$$\begin{aligned}
p(\lambda) = \det(A-\lambda I) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & \lambda-1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & \lambda-1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & \lambda-1 \\ 1 & 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & \lambda-1 \\ 0 & 1-\lambda & \lambda-1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} - (\lambda-1)\begin{vmatrix} 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (1=\lambda)\left[(1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & \lambda-1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} + (\lambda-1)\begin{vmatrix} 0 & 1-\lambda \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\right] + (1-\lambda)\left[-(1-\lambda)\begin{vmatrix} 0 & 1-\lambda \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\right] \\
&= (1-\lambda)^3(2-\lambda) + 3(1-\lambda)^3 \\
&= (1-\lambda)^3(5-\lambda).
\end{aligned}$$

(b) Notemos que dado que la matriz $A \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$ es simétrica, entonces existe una base ortonormal formada por vectores propios.

Buscaremos ahora los subespacios propios de la matriz A.

Para $\lambda = 1$

Definamos el subespacio propio W_1 asociado al valor propio 1, como:

$$W_1 = \left\{ v \in \mathbb{R}^4 \ : \ (A-I)v = \theta \right\},$$

es decir,

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in W_1 \quad \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Luego, dado que todas las filas de A son iguales, se tiene que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in W_1 \Longleftrightarrow x + y + z + w = 0.$$

Por lo tanto, tenemos que

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in W_1 \Longleftrightarrow v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ -x-y-z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Luego una base de W_1 es

$$B = \{u_1, u_2, u_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

la cual no es una base ortonormal. Para obtener la base ortonormal utilizaremos un proceso de ortonormalizacion.

Sean

$$v_1 = u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$v_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

además

$$w_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

Finalmente, sea

$$\begin{aligned} v_3 &= u_3 - \frac{\langle u_3, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{\langle u_3, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2 \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{3}{2} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{4} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} \\ -\frac{3}{4} \\ 1 \\ -\frac{9}{8} \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 8 \\ -9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

así tenemos que

$$w_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|} = \frac{1}{\sqrt{182}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 8 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Luego

$$B' = \{w_1, w_2, w_3\}$$

es una base ortonormal de W_1.

Para encontrar la base ortonormal de $\mathbb{R}^4$ nos basta agregar un elemento w_4, l.i. a la base anterior de manera que sea ortogonal a B' y de norma 1, para esto buscaremos el subespacio propio asociado a el segundo valor propio.

Para $\lambda = 5$

En este caso tenemos lo siguiente. definamos el subespacio propio W_5 asociado al valor propio $\lambda = 5$. Luego

$$W_1 = \left\{ v \in \mathbb{R}^4 \ : \ (A - 5I)v = \theta \right\},$$

es decir,

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in W_1 \quad \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Veamos las soluciones de este sistema de ecuaciones homogéneo. Para resolverlo aplicaremos operaciones elementales sobre la matriz A.

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 4 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto tenemos que

$$x + y + z - 3w = 0, \qquad -4y + 4w = 0, \qquad -4z + 4w = 0,$$

de donde se concluye que

$$y = w, \qquad z = w, \qquad x = -y - z + 3w = -2w + 3w = 0,$$

es decir

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in W_5 \Longleftrightarrow v = \begin{pmatrix} w \\ w \\ w \\ w \end{pmatrix} = w \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, si llamamos

$$v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y

$$w_4 = \frac{v_4}{\|v_4\|} = \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

tenemos que

$$\widetilde{B} = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$$

es una base ortonormal de $\mathbb{R}^4$, formada por vectores propios de A.

(2) Veamos los valores propios de la matriz A. Se tiene que el polinomio característico es

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda I) &= \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (a-\lambda)(d-\lambda)-bc \\ &= \lambda^2-(a+d)\lambda+(ad-bc).\end{aligned}$$

Luego, los valores propios son las raíces de

$$\lambda^2-(a+d)\lambda+(ad-bc)=0,$$

es decir,

$$\lambda = \frac{(a+d)\pm\sqrt{(a+d)^2-4(ad-bc)}}{2} = \frac{(a+d)\pm\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{2},$$

como b y c son constantes positivas se tiene que

$$\sqrt{(a-d)^2+4bc}>0,$$

y por lo tanto la matriz A tiene dos valores propios reales diferentes, lo que muestra que A es diagonalizable.

Problema 2:

Considere la aplicación

$$\begin{array}{ccc} T:\mathbb{R}^5 & \longrightarrow & \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} a\\ b\\ c\\ d\\ e \end{pmatrix} & \longrightarrow & T\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\\ d\\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+e & c \\ -c & b+d \end{pmatrix} \end{array}$$

(1) Pruebe que T es una transformación lineal.

(1 pto.)

(2) Obtenga una base y la dimesión para el Ker (T) e Im (T). Determine si T es inyectiva y/o sobreyectiva.

(2 ptos.)

(3) Encuentre la matriz representante de T con respecto a las bases canónicas

$$B=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

y

$$B'=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$$

(1 pto.)

(4) Utilizando la matriz de cambio de base y la matriz obtenida en la parte anterior, calcule la matriz representante de T con respecto a las bases

$$B_1=\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

y

$$B_2=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\right\}$$

(2 ptos.)

Solución:

(1) Veamos que la aplicación T es lineal. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y sean $u, v \in \mathbb{R}^5$ dados por

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix} \qquad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{pmatrix}$$

luego

$$\begin{aligned}
T(\alpha u + \beta v) &= T \begin{pmatrix} \alpha u_1 + \beta v_1 \\ \alpha u_2 + \beta v_2 \\ \alpha u_3 + \beta v_3 \\ \alpha u_4 + \beta v_4 \\ \alpha u_5 + \beta v_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha u_1 + \beta v_1) + (\alpha u_5 + \beta v_5) & (\alpha u_3 + \beta v_3) \\ -(\alpha u_3 + \beta v_3) & (\alpha u_2 + \beta v_2) + (\alpha u_4 + \beta v_4) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha(u_1 + u_5) + \beta(v_1 + v_5) & (\alpha u_3 + \beta v_3) \\ -(\alpha u_3 + \beta v_3) & \alpha(u_2 + u_4) + \beta(v_2 + \beta v_4) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha(u_1 + u_5) & \alpha u_3 \\ -\alpha u_3 & \alpha(u_2 + u_4) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta(v_1 + v_5) & \beta v_3 \\ -\beta v_3 & \beta(v_2 + \beta v_4) \end{pmatrix} \\
&= \alpha \begin{pmatrix} (u_1 + u_5) & u_3 \\ -u_3 & (u_2 + u_4) \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} (v_1 + v_5) & v_3 \\ -v_3 & (v_2 + \beta v_4) \end{pmatrix} \\
&= \alpha \, T \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix} + \beta \, T \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

lo que prueba que T es una transformación lineal.

(2) Estudiaremos en primer lugar el Ker (T), luego se tiene que $v \in$ Ker (T) si y sólo si $T(v) = \theta$.
Sea

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{pmatrix} \in \text{ Ker } (T),$$

luego

$$T \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (v_1 + v_5) & v_3 \\ -v_3 & (v_2 + \beta v_4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

así tenemos que

$$v_1 + v_5 = 0, \qquad v_3 = 0, \qquad v_2 + v_4 = 0,$$

es decir

$$v_5 = -v_1, \qquad v_3 = 0, v_4 = -v_2,$$

de donde tenemos que

$$v \in \text{ Ker } (T) \Longleftrightarrow v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \\ -v_2 \\ -v_1 \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

de donde se obtiene que

$$\dim \text{Ker } (T) = 2$$

y una base está dada por

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Luego, del Teorema Núcleo-Imagen se tiene que

$$\dim \operatorname{Im}(T) = 3.$$

Buscaremos ahora una base de Im (T).
Sea

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \operatorname{Im}(T),$$

luego se tiene que existe $v \in \mathbb{R}^5$ tal que

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+e & c \\ -c & b+d \end{pmatrix},$$

es decir, el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} a+e &= \alpha \\ c &= \beta \\ -c &= \gamma \\ b+d &= \delta \end{aligned}$$

tiene solución. Estudiaremos ahora el sistema de ecuaciones anterior.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \delta \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \delta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta+\gamma \end{array}\right)$$

de donde se concluye que el sistema tiene solución si y sólo si

$$\beta + \gamma = 0,$$

por lo tanto

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \delta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

por lo tanto una base de Im (T) está dada por

$$B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(3) Buscaremos ahora la matriz representante de A con respecto a las bases canónicas. Así tenemos que

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$$

por tanto la matriz representante de T con respecto a las bases canónicas es

$$\mathcal{M}_{BB'}(T)=\begin{pmatrix}1&0&0&0&1\\0&0&1&0&0\\0&0&-1&0&0\\0&1&0&1&0\end{pmatrix}$$

(4) Calculemos ahora las matrices de paso entre las bases B y B_1, y entre B' y B_2. Así tenemos que

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

por lo tanto

$$\mathcal{M}_{B_1B}(I)=\begin{pmatrix}0&0&1&0&1\\0&0&1&1&1\\0&0&1&1&-1\\0&1&0&1&1\\1&1&0&1&1\end{pmatrix}$$

Por otra parte

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

por lo tanto

$$\mathcal{M}_{B_2B'}(I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Así se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{B_1B_2}(I) &= \mathcal{M}_{B'B_2}(I)\mathcal{M}_{BB'}(T)\mathcal{M}_{B_1B}(I) = [\mathcal{M}_{B_2B'}(I)]^{-1}\,\mathcal{M}_{BB'}(T)\mathcal{M}_{B_1B}(I) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Problema 3:

(1) Sea $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ una transformación lineal tal que

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

y

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Entonces de una expresión para T sabiendo que **Im** (T) **=** **Ker** (T).

(3 ptos.)

(2) Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ constantes arbitrarias. Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\beta \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha - 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(a) Encuentre los valores de α y β, tales que la aplicación T no es inyectiva.

(1.5 ptos.)

(b) Encuentre una base y la dimensión de **Ker** (T) **e Im** (T) para el caso $\alpha = 1$ y $\beta = 0$.

(1.5 ptos.)

Solución:

(1) Dado que la aplicación lineal está definida de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}^4$, y del teorema Núcleo-Imagen, se tiene que

$$\dim \mathrm{Ker}\ (T) + \dim \mathrm{Im}\ (T) = 4,$$

y dado que Ker $(T) =$ Im (T), tenemos que

$$\dim \mathrm{Ker}\ (T) = \dim \mathrm{Im}\ (T) = 2,$$

además podemos observar que

$$T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ya que

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}\ (T).$$

Por otra parte, el conjunto

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

es linealmente independiente y por lo tanto una base de $\mathbb{R}^4$.

Además

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Luego, se tiene que

$$\begin{array}{rcl} a+b+d & = & x \\ a+c+d & = & y \\ b+d & = & z \\ -c & = & w \end{array}$$

así resolviendo el sistema de ecuaciones, tenemos que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = (x-z)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (x-y-w)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - w\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + (z+y+w-x)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto tenemos que

$$
\begin{aligned}
T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} &= (x-z)T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (x-y-w)T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - wT\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + (z+y+w-x)T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= (x-z)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + (x-y-w)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x-y-w \\ 2x-y-w-z \\ x-y-w \\ z-w \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

(2) (a) Veamos la definición de la aplicación T. Se tiene que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y resolviendo el sistema, tenemos que

$$a = x, \qquad b = x-y, \qquad c = y+z-2x$$

por lo tanto, tenemos que

$$
\begin{aligned}
T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= xT\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (x-y)T\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + (y+z-2x)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= x\begin{pmatrix} 2\beta \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix} + (x-y)\begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + (y+z-2x)\begin{pmatrix} \beta \\ \alpha-1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \beta y + \beta z \\ 2x - y + (\alpha-1)z \\ \beta x - \beta y \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

El sistema homogéneo asociado tiene solución única si y sólo si la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \beta & \beta \\ 2 & -1 & (\alpha-1) \\ \beta & -\beta & 0 \end{pmatrix}$$

es invertible, luego

$$\det A = (\alpha-2)\beta^2,$$

lo que nos dice que la matriz es invertoble si y sólo si $\alpha \neq 0$ y $\beta \neq 0$, lo que nos dice que la aplicación T no es invertible si y sólo si $\alpha = 2$ o bien $\beta = 0$.

(b) Ahora, si $\alpha = 1$ y $\beta = 0$ se tiene que

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2x+y \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{ Ker } (T) \Longleftrightarrow -2x+y = 0$$

es decir

$$\text{Ker }(T) \;=\; \left\{ \left(\begin{array}{c} x \\ 2x \\ z \end{array} \right) \;:\; x, z \in \mathbb{R} \right\}$$

por lo tanto una base de Ker (T) es

$$B = \left\{ \left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right) \right\}$$

además del Teorema Núcleo-Imagen tenemos que

$$\dim \text{ Im }(T) = 1$$

y dado que

$$\left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right) \;\in\; \text{Im }(T)$$

tenemos que una base de la Im (T) está dada por

$$B' = \left\{ \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right) \right\}$$