Pauta Control 6 MA-11A Algebra

Noviembre 1996

P1. Sea $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in P_3(I\!R)$. Se tiene entonces que:

$$p(0) = a_0 \wedge p(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3.$$

La transformación L se puede escribir (al desarrollar) como:

$$\begin{aligned} L(p(x)) &= p(0)x^3 + p(1)(x^2 - 8x + 16) \\ &= 16 - 8p(1)x + p(1)x^2 + p(0)x^3 \\ &= 16 - 8(a_0 + a_1 + a_2 + a_3)x + (a_0 + a_1 + a_2 + a_3)x^2 + a_0x^3 \qquad (*) \end{aligned}$$

Usaremos esta escritura en la parte (ii).

i) Veamos que L es una transformación lineal. Sea $\lambda \in I\!R$ y $p(x), q(x) \in P_3(I\!R)$.

$$\begin{aligned} L(\lambda p(x) + q(x)) &= (\lambda p(0) + q(0))x^3 + (\lambda p(1) + q(1))(x-4)^2 \\ &= \lambda p(0)x^3 + q(0)x^3 + \lambda p(1)(x-4)^2 + q(1)(x-4)^2 \\ &= \lambda(p(0)x^3 + p(1)(x-4)^2) + q(0)x^3 + q(1)(x-4)^2 \\ &= \lambda L(p(x)) + L(q(x)) \end{aligned}$$

ii) Para calcular la matriz representante de L con respecto a $\beta = \{1, x, x^2, x^3\}$ debemos calcular la descomposición de $L(1), L(x), L(x^2)$ y $L(x^3)$ en la base β.

Usando la formula $(*)$ se tiene:

$$\begin{aligned} L(1) &= 16 - 8x + x^2 + x^3 \text{ pues } a_0 = 1, a_1 = a_2 = a_3 = 0 \\ L(x) &= 16 - 8x + x^2 = (x-4)^2 \text{ pues } a_1 = 1, a_0 = a_2 = a_3 = 0 \\ L(x^2) &= 16 - 8x + x^2 = (x-4)^2 \text{ pues } a_2 = 1, a_0 = a_1 = a_3 = 0 \\ L(x^3) &= 16 - 8x + x^2 = (x-4)^2 \text{ pues } a_3 = 1, a_0 = a_1 = a_2 = 0 \end{aligned}$$

Luego la matriz representante pedida es

$$M = \begin{bmatrix} 16 & 16 & 16 & 16 \\ -8 & -8 & -8 & -8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(iii) Escribamos los vectores de β' en β:

$$
\begin{aligned}
1 &= 1\cdot 1 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 + 0\cdot x^3\\
x &= 0\cdot 1 + 1\cdot x + 0\cdot x^2 + 0\cdot x^3\\
(x-4)^2 &= 16\cdot 1 + (-8)x + 1\cdot x^2 + 0\cdot x^3\\
x^3 &= 0\cdot 1 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 + 1\cdot x^3
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 16 & 0\\ 0 & 1 & -8 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

representa a la identidad desde la base β' a la base β.

Por otro lado los vectores de β en la base β' se escriben:

$$
\begin{aligned}
1 &= 1\cdot 1 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 + 0\cdot x^3\\
x &= 0\cdot 1 + 1\cdot x + 0\cdot x^2 + 0\cdot x^3\\
x^2 &= (-16)\cdot 1 + 8x + 1\cdot (x-4)^2 + 0\cdot x^3\\
x^3 &= 0\cdot 1 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 + 1\cdot x^3
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -16 & 0\\ 0 & 1 & 8 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

representa a la identidad desde la base β a la base β'.

Finalmente, la matriz que representa a L con respecto a β' se calcula como:

$$
\bar{M} = B\cdot M\cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -16 & 0\\ 0 & 1 & -8 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 & 16 & 16 & 16\\ -8 & -8 & -8 & -8\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 16 & 0\\ 0 & 1 & -8 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 16 & 0\\ 0 & 1 & -8 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 9 & 1\\ 1 & 0 & 16 & 0 \end{bmatrix}
$$

P2. (i)

1. – Calculemos los valores y vectores propios de la matriz A:

$det(A-\lambda I) = (2-\lambda)^3(-\lambda) \Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 0$ son los valores propios de A.

– Vectores propios asociados a 2:

El sistema $(A-2I)x = 0$ se escribe: $x_2 = x_3 = 0$, $x_1, x_4 \in I\!R$. Luego el espacio propio asociado a 2 es:

$$W_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

– Vectores propios asociados a 0.

El sistema $(A-0I)x = 0$ se escribe $\begin{array}{r} 2x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_2 = 0 \\ 2x_4 = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} x_2 = x_4 = x_1 = 0 \\ x_3 \in I\!R \end{array}$. Luego el espacio propio asociado a 0 es:

$$W_0 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Luego la matriz no es diagonalizable pues no existe una base de $I\!R^4$ formada de vectores propios.

2.– Calculemos los valores y vectores propios de la matriz B:

$$\begin{aligned} det(B-\lambda I) &= (2-\lambda)\left[(1-\lambda)^2(2-\lambda) - (2-\lambda)\right] \\ &= (2-\lambda)^2[\lambda^2 + 1 - 2\lambda - 1] \begin{array}{l} = (2-\lambda)^2(\lambda-2)\cdot\lambda \\ = (\lambda-2)^3\cdot\lambda \end{array} \end{aligned}$$

Luego los valores propios son $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 0$.

– Vectores propios asociados a 2:

El sistema $(B-2I)x = 0$ se escribe: $\begin{array}{r} -x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{array}$
$\Rightarrow x_2 = x_3, x_1, x_4 \in I\!R$.

$$\Rightarrow \quad W_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

– Vectores propios asociados a 0:

El sistema $(B - 0I)x = 0$ se escribe:

$$\begin{aligned} 2x_1 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_4 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= -x_3 \\ x_4 &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow W_0 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Luego existe una base de vectores propios de B para $\mathbb{R}^4$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

lo que implica que B es diagonizable.

3.– Calculemos los valores propios de C:

$$det(C - \lambda I) = (-\lambda)(2 - \lambda)^3 \Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 0$$

El espacio propio asociado a 2 es:

$$W_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

y el espacio propio asociado a 0 es:

$$W_0 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

pues C es diagonal.

(ii) Recordemos que dos matrices M, N son similares si $\exists P$ invertible tal que:

$$M = P^{-1}NP$$

Una consecuencia directa es que si M es diagonalizable, entonces, N también lo es. Luego A no es similar ni con B, ni con C.

Falta verificar si B y C lo son. Vimos que B es similar con la matriz diagonal que contiene en la diagonal 3 veces 2 y 1 vez 0. Si ordenamos los vectores propios de manera que la base sea:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

entonces B es similar con la diagonal $\begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 2 & & \\ & & 2 & \\ & & & 2 \end{bmatrix}$ que es C.

3. (i) Si A es diagonalizable entonces existe P invertible tal que $A = PDP^{-1}$ con D matriz diagonal. Además $A^n = PD^nP^{-1}$.

Si $p(a) = a_0 + a_1 \cdot \lambda + ... + a_n\lambda^n$ es el polinomio característico de A entonces

$$\begin{aligned} p(A) &= a_0 I + a_1 A + ... + a_n A_1^n = a_0 P \cdot I \cdot P^{-1} + a_1 P \cdot D \cdot P^{-1} + ... + a_n P \cdot D^n \cdot D^{-1} \\ &= P \cdot (a_0 \cdot I + a_1 \cdot D + ... + a_n \cdot D^n) \cdot P^{-1} \end{aligned}$$

Estudiemos $P(D) = a_0 \cdot I + a_1 \cdot D + ... + a_n \cdot D^n$. Sabemos que en la diagonal de D están los valores propios de A y $P(D)$ es diagonal, luego $P(D)_{ii} = a_0 + a_1 \cdot D_{ii} + ... + a_n D_{ii}^n = p(D_{ii}) = 0$, pues D_{ii} es valor propio de A y p es su polinomio característico.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & P(D) = 0 \text{ (matriz nula de } n \times n) \\ \Rightarrow \quad & P(A) = P \cdot P(D) \cdot P^{-1} = 0 \end{aligned}$$

(ii) Llamemos $A_n = A$ y $A_{n-1} = \begin{bmatrix} 0 & & & 0 & -\alpha_1 \\ & 1 & & & \vdots \\ & & 1 & & \vdots \\ & & & \cdots & \vdots \\ & & & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}$. Se tiene que $det(A_n - \lambda I) = (-\lambda) \cdot det(A_{n-1} - \lambda I) + (-1)^{n+1}(-\alpha_0) \cdot det(B_{n-1})$ donde

$$B_{n-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\lambda & & & \\ & \ddots & \ddots & & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & \\ & & & & -\lambda \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow det B_{n-1} = 1.$$

$$\Rightarrow det(A_n - \lambda I) = det(A_{n-1} - \lambda I) \cdot (-\lambda) + (-1)^n \alpha_0$$

Nuestra hipótesis de inducción permite decir que:

$$det(A_{n-1} - \lambda I) = (-1)^{n-1}(\sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \lambda^{k-1} + \lambda^{n-1}),$$

luego,

$$\begin{aligned} det(A_n - \lambda I) &= (-1)^n \cdot \lambda(\sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \lambda^{k-1} + \lambda^{n-1}) + (-1)^n \alpha_0 \\ &= (-1)^n \left[\sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \lambda^k + \lambda^n\right] + (-1)^n \alpha_0 \\ &= (-1)^n (\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \lambda^n + \lambda^n) \end{aligned}$$

Falta ver el $det(A_2 - \lambda I)$:

$$\begin{aligned} A_2 - \lambda I = \begin{bmatrix} -\lambda & -\alpha_0 \\ 1 & -\alpha_1 - \lambda \end{bmatrix} \Rightarrow det(A_2 - \lambda I) &= \lambda \cdot \alpha_1 + \lambda^2 + \alpha_0 \\ &= \alpha_0 + \lambda_1 \cdot \lambda + \lambda^2 \\ &= (-1)^2 \cdot (\alpha_0 + \alpha_1 \cdot \lambda + \lambda^2) \end{aligned}$$

Es decir hemos concluido la inducción.