PAUTA CONTROL 6 - MA11A-ALGEBRA

(1998)

Pregunta 1.

(a) Sean $\alpha, \beta \in I\!R$ y $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \in M_{2x2}(I\!R)$,

$$\Rightarrow T\left(\alpha \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} \alpha a+\beta e & \alpha b+\beta f \\ \alpha c+\beta g & \alpha d+\beta h \end{bmatrix}\right) =$$

$$\begin{pmatrix} \alpha a+\beta e & - & (\alpha b+\beta f) \\ \alpha b+\beta f & - & (\alpha c+\beta g) \\ \alpha c+\beta g & - & (\alpha d+\beta h) \\ \alpha d+\beta h & - & (\alpha a+\beta e) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha(a-b)+\beta(e-f) \\ \alpha(b-c)+\beta(f-g) \\ \alpha(c-d)+\beta(g-h) \\ \alpha(d-a)+\beta(h-e) \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} a-b \\ b-c \\ c-d \\ d-a \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} e-f \\ f-g \\ g-h \\ h-e \end{pmatrix}$$

$$= \alpha T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) + \beta T\left(\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\right)$$

Luego T es lineal

(b) CALCULO DE KER T:

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a-b,\ b-c,\ c-d,\ d-a) = (0,\ 0,\ 0,\ 0)$$

$$\Rightarrow a=b, \qquad b=c, \qquad c=d, \qquad d=a \ \Rightarrow$$

$$KerT = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2x2}(I\!R) \ / \ a=b=c=d\right\}$$

$$= \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle; \text{ Luego Base Ker T } = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\} \text{ y dim Ker T } = 1$$

CALCULO DE Im T: (hay varias maneras)

Sea $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ una base de $M_{2x2}(\mathbb{R})$. Luego,

$$\begin{aligned} TB &= \left\{ T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right), T\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right), T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right), T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Sabemos que $ImT = \langle TB \rangle$ y por teorema de núcleo e imagen $dim\ ImT = 4 - dim\ KerT = 4 - 1 = 3$. Luego hay que elimar un vector $l.i.$ del generador anterior.

Pero $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = (-1) \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Luego

$$\text{ImT} = \underbrace{\left\langle \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle}_{B'} \text{ y } B' \text{ es una base de ImT.}$$

(c) INYECTIVIDAD: Es inyectiva si KerT $= \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$. Luego, no es inyectiva, pues dim KerT $= 1$.

SOBREYECTIVIDAD: Para que sea sobreyectiva debe cumplirse dim ImT $= 4 =$ dim $\mathbb{R}^4$ y dim ImT $= 3$. Luego no es sobreyectiva.

(d) Calculemos,

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = (0,1,0,-1), T\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = (-1,0,1,0)$$

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = (0,-1,0,1), T\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\right) = (0,2,-2,0)$$

Hay que resolver en general el sistema.

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} \alpha & + & \beta & + & \delta & + & \sigma & = & a \\ & - & \beta & - & \delta & - & \sigma & = & b \\ & & & - & \delta & & & = & c \\ & & & & & - & \sigma & = & d \end{array}\right\}$$

$$\begin{array}{cccc} \Rightarrow & \alpha & = & a+b-c-d+c+d = a+b \\ \Rightarrow & \beta & = & b+c+d \\ \Rightarrow & \delta & = & -c \\ \Rightarrow & \sigma & = & -d \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-2)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-4)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (2)\begin{pmatrix} 1 \\ -0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Pregunta 2.

(a)

(i)

$$\begin{array}{ccccc} T(1) & = & 1+2x^2 & = & 1+0\cdot\ x+2\ x^2 \\ T(x) & = & x & = & 0+1\cdot\ x+0\ x^2 \\ T(x^2) & = & 2+x^2 & = & 2+0\cdot\ x+1\ x^2 \end{array}$$

Luego, $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(ii) Vamos a calcular los valores propios de A.

POLINOMIO CARACTERISTICO:

$$p(\gamma) \qquad = (1-\gamma)\left[(1-\gamma)^2\right] + \ 2\left[(-2)\cdot(1-\gamma)\right]$$

$$= (1-\gamma)\left[(1-\gamma)^2-4\right] \qquad = (1-\gamma)[\gamma^2-2\gamma+1-4]$$
$$= (1-\gamma)(\gamma^2-2\gamma-3)$$
$$= (1-\gamma)(\gamma-3)(\gamma+1)$$

Luego los valores propios: $\gamma_1=1, \gamma_2=3, \gamma_3=-1$

ESPACIOS PROPIOS:

$$W\gamma_{2x}=\left\langle\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\rangle, W\gamma_1=\left\langle\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\rangle, W\gamma_3=\left\langle\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\rangle$$

Como A es simétrica basta normalizar estos vectores ortogonales para escribir $A = PDP^T$:

$$A=\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$A^{2n}=\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3^{2n} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3^{2n}/\sqrt{2} & 0 & 3^{2n}/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3^{2n}+1}{2} & 0 & \frac{3^{2n}-1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{3^{2n}-1}{2} & 0 & \frac{3^{2n}+1}{2} \end{bmatrix}$$

(iii) $T^{2n}(1+x+x^2)$ se calcula,

$$A^{2n}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^{2n} \\ 1 \\ 3^{2n} \end{pmatrix} \Rightarrow T^{2n}(1+x+x^2) = 3^{2n} + x + 3^{2n}\ x^2$$

(b) Claramente los valores propios son $\gamma_1 = 2$ y $\gamma_2 = 1$ pues $p(\gamma) = (2-\gamma)^3(1-\gamma)^2$. Calculemos los vectores propios:

$\gamma_1 = 2:$

$$\begin{array}{ccccccc} 2x_1 + \alpha x_2 & = & 2x_1 & \Rightarrow & \alpha x_2 & = 0 & , \quad x_1 \in I\!R \\ 2x_2 + \alpha x_3 & = & 2x_2 & \Rightarrow & \alpha x_3 & = 0 & , \quad x_2 \in I\!R \\ 2x_3 & = & 2x_3 & \Rightarrow & x_3 \in I\!R & & \\ x_4 + \beta x_5 & = & 2x_4 & \Rightarrow & x_4 & = & 0 \\ x_5 & = & 2x_5 & \Rightarrow & x_5 & = & 0 \end{array}$$

$\Rightarrow\ x_4 = x_5 = 0,\ \alpha\ x_2 = 0,\ \alpha\ x_3 = 0, x_1 \in I\!R$

Caso 1: Si $\alpha = 0$ $\quad \Rightarrow x_1, x_2, x_3 \in I\!R,\ x_4 = x_5 = 0$
$\Rightarrow dim(Ker(A-2I)) = 3$

Caso 2: Si $\alpha \neq 0$ $\quad \Rightarrow x_4 = x_5 = x_2 = x3 = 0, x_1 \in I\!R$
y $dim(Ker(A-2I)) = 1$

$$\gamma_2 = 1: \quad \begin{array}{ccccccc} 2x_1 + \alpha\ x_2 & = & x_1 & \Rightarrow & x_1 & = 0 \\ 2x_2 + \alpha\ x_3 & = & x_2 & \Rightarrow & x_2 & = 0 \\ 2x_3 & = & x_3 & \Rightarrow & x_3 & = 0 \\ x_4 + \beta x_5 & = & x_4 & \Rightarrow & \beta x_5 & = 0, x_4 \in I\!R \\ x_5 & = & x_5 & & & \end{array}$$

Caso 1: Si $\beta = 0$ $\quad \Rightarrow\ x_5 \in I\!R, x_4 \in I\!R,\ x_1 = x_2 = x_3 = 0$
$\Rightarrow\ dim(Ker(T-I)) = 2$

Caso 2: Si $\beta \neq 0$ $\quad \Rightarrow\ x_5 = 0 = x_1 = x_2 = x_3,\ x_4 \in I\!R$
$dim(Ker(T-I)) = 1$

$\Rightarrow$ Para ser diagonalizable $\ 5 \ = dim\ Ker(T-2\ I) + dim(Ker(T-I)$
$\Rightarrow \qquad \alpha = \beta = 0$

Pregunta 3.

(a)

$$\begin{array}{rcc} A\ v = \gamma\ v & \Leftrightarrow & R \cdot Sv = \gamma v \\ & \Leftrightarrow & S(R \cdot Sv) = S(\gamma v) \text{ (pues S invertible)} \\ & \Leftrightarrow & SR(Sv) = \gamma(Sv) \end{array}$$

Como $v \neq 0$ y S invertible entonces $Sv \neq 0$ además $B(Sv) = \gamma(Sv)$, luego Sv es vector propio de B asociado a γ.

Recíprocamente si $B(Sv) = \gamma(Sv)$ con $Sv \neq 0$ entonces $v \neq 0$ pues S es invertible y

$$B^{-1}B(Sv) = S^{-1}(\gamma Sv)$$

$$\Leftrightarrow R\ S\ v = \gamma v \Leftrightarrow Av = \gamma v$$

lo que dice que v es vector propio de A asociado a γ.

Luego $\{\gamma \in I\!R|\ \gamma$ es valor propio de $A\} \subseteq \{\gamma \in I\!R|\gamma$ es $v.p.$ de $B\}$. Ahora si $\gamma \in I\!R$ es $v.p$ de B se tiene que $Bu = \gamma u$ para $u \in I\!R^n \setminus \{0\}$. Pero S es invertible luego $u = Sv$ para algún $v \in I\!R^n \setminus \{0\}$. Es decir Sv es vector propio de B asociado a $\gamma \in I\!R$. Luego por lo anterior γ es valor propio de A. Es decir {valores propios de A} = {valores propios de B}

(b) Sea $\gamma \in I\!R$ valor propio de A (luego de B) :

Sea $\{u_1, \cdots, u_\ell\}$ una base de $Ker(A - \gamma I)$.

Probemos que $\{Su_1, \cdots, Su_\ell\}$ es una base de $Ker(B - \gamma I)$.

Sabemos que $v \in Ker(B - \gamma I)$ se escribe como $v = S(u)$ para algún $u \in Ker\ (A - \gamma I)$, luego

$$v = \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i S(u_i). \text{ Esto prueba que } Ker(B - \gamma I) = \langle \{Su_1, \cdots, Su_\ell\} \rangle$$

Como S es invertible, $\{S(u_1), \cdots, S(u_\ell)\}$ es $l.i.$ y $\{S(u_1), \cdots, S(u_\ell)\}$ es base de Ker $(B - \gamma I)$. Luego dim $(Ker$ $(B - \gamma I))$ $=$ dim $(Ker$ $(A - \gamma I)) = \ell$.

(c) A es diagonalizable ssi $dim\ I\!R^n = n = \sum\limits_{i=1}^{p} dim\ (\sqcup_{\gamma i}(A))$ donde $(\gamma_1\ ,\ \cdots, \gamma_p)$ son los valores propios distintos de A. Pero $dim(\sqcup\gamma_i\ (B))\ = \dim\ (\sqcup\gamma_i(A))$. Luego si A es diagonalizable, B es diagonalizable y viceversa.