PAUTA CONTROL 6 - MA11A-ALGEBRA

(1999)

Pregunta 1.

1) T: $I\!R^4 \to I\!R^3$ dada por

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ x_3 + x_1 - 3x_4 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Luego A es la matriz representante de T c/r a bases canónicas de $I\!R^4$ y $I\!R^3$ respectivamente.

i) $\underline{\text{Cálculo } Ker(T) = \{x \in I\!R^4 | A \cdot x = 0\} :}$

Resuelvo el sistema $A \cdot x = 0$:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 6 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & -18 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow 4x_3 - 18x_4 = 0 \Rightarrow x_3 = \frac{9}{2}x_4$

$$\left.\begin{array}{rcccl} -x_2 - 2x_3 + 6x_4 & = & 0 & \Rightarrow & x_2 = -9x_4 + 6x_4 = -3x_4 \\ 2x_1 - x_2 & = & 0 & \Rightarrow & x_1 = \frac{-3}{2}x_4 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_4 \begin{pmatrix} \frac{-3}{2} \\ -3 \\ \frac{9}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{x_4}{2} \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Ker(T) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle \qquad \text{Base } Ker(T) = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

<u>Cálculo $Im(T)$:</u> basta ver que columnas de A son l.i. para ello notemos que basta escalar A. Eso se realizó en la parte anterior, con resultado

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} l.i.$$

De los 2 cálculos anteriores decudimos que

-T no es inyectiva pues $Ker(T) \neq \{0\}$

-T es sobreyectiva pues dim $(Im(T)) = 3 = dim\ I\!R^3$

ii) Vamos a calcular la matriz pedida B usando matrices de pasaje: El esquema es el siguiente.

$$\begin{array}{ccc} (I\!R^4, \mathcal{C}_4) & \overset{A}{\underset{T}{\rightarrow}} & (I\!R^3, \mathcal{C}_3) \\ \uparrow P & & \uparrow Q \\ (I\!R^4, \beta) & \overset{B}{\underset{T}{\rightarrow}} & (I\!R^3, \beta') \end{array}$$

$$\Rightarrow B = \quad Q^{-1}.\ A \cdot P$$

La matriz $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ y $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Hay que calcular Q^{-1} :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \qquad Q^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 & 3 \\ -5 & -13 & -4 & -5 \\ 1 & -2 & 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -7 & 0 & -6 \\ -7 & -18 & -6 & -8 \\ -3 & -12 & -2 & -9 \end{bmatrix}$$

Pregunta 2.

2.1) Cálculo valores propios:

$$det\begin{bmatrix} (-2-\lambda) & | & 2 & | & 0 \\ 2 & | & (-4-\lambda) & | & 2 \\ 0 & | & 2 & | & (-2-\lambda) \end{bmatrix} = (-2-\lambda)[(-4-\lambda)(-2-\lambda)-4]-2[2(-2-\lambda)-0]$$

$$\begin{aligned} &= (-1)(2+\lambda) \quad ([(\lambda+4)(\lambda+2)-4]-4) \\ &= (-1)(\lambda+2) \quad (\lambda^2+6\lambda+8-8) \\ &= (-1)(\lambda+2) \quad \cdot\lambda\cdot\lambda\cdot(\lambda+6) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ valores propios $-2, 0, -6$

Cálculo W_{-2} :

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} y &= 0 \\ 2x+2z &= 0 \Rightarrow x = -z \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow W_{-2} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

y $u_1 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Cálculo de W_0 :

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} 2y-2z &= 0 \Rightarrow y = z \\ -2x+2y &= 0 \Rightarrow x = y = z \end{aligned}$$

$$\Rightarrow W_0 = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

y $u_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$

Cálculo de W_{-6} :

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \Rightarrow y = -2z \\ x = z \end{matrix} \Rightarrow W_6 = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

$$\Rightarrow u_3 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \{u_1, u_2, u_3\}$ es base ortonormal de vectores propios pues u_1, u_2, u_3 son vectores propios asociados a valores propios $\neq$ y resultan ortogonales. Como dividimos por la norma, son de norma 1.

2.2) Valores propios: como A es triangular superior, los valores propios son $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$

Espacios propios:

$$W_1 : \quad \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad \begin{matrix} z = 0 \\ a \cdot y = 0 \\ x \text{ libre} \end{matrix}$$

Si $a \neq 0 \Rightarrow z = 0,\ y = 0,\ x$ libre $\Rightarrow$ $dim\ W_1 = 1$

Si $a = 0 \Rightarrow z = 0,\ x,\ y$ libre $\Rightarrow dim\ W_1 = 2$

$$W_2 : \quad \begin{bmatrix} -2 & a & 0 \\ 0 & -2 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \qquad \begin{matrix} z \text{ es libre} \\ y = \frac{a \cdot z}{2}, x = \frac{a^2}{4} z \end{matrix}$$

$$\Rightarrow dim\ W_2 = 1$$

$\Rightarrow$ Si $a \neq 0$ $dim\ W_1 + dim\ W_2 = 2 < 3$ no es disgonalizable.

Si $a = 0$ $dim\ W_1 + dim\ W_3 = 3$ es diagonalizable.

Pregunta 3.

i) Si $dim\ Ker(T) = 2 \Rightarrow \lambda = 0$ es valor propio de A y W_0 tiene dim 2.

Como $\lambda = 2$ es valor propio y $A \in M_{3x3}(I\!R)$ no hay más valores propios y dim $W_2 = 1$.

$$\Rightarrow W_2 = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle \text{ y si } W_0 =< \{u_1, u_2\} >$$

si tiene que $< u_1, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} > = 0, < u_2, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} > = 0$ pues A es simétrica y $I\!R^3 =$ $W_2 \oplus W_0$. Se deduce que $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in W_0$

y $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ es la matriz representante respecto de base canónica.

ii) Sea $B \in M_{n,n}(I\!R)$ definida por,

$B_{ij} = L(E^{(i,j)})$, donde $E^{(i,j)}$ es la matriz en $M_{nxn}(I\!R)$ que vale 0 salvo en (i, j) donde vale 1.

$\Rightarrow A = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} \cdot E^{(i,j)}$ (pues$\{E^{(i,j)}, i \in \{1, -, n\}, j \in \{1, -, n\}$ es base canónica).

$$\Rightarrow L(A) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{i,j} \cdot \underbrace{L(E^{(i,j)})}_{B_{i,j}} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{i,j} \cdot B_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (B^T_{j,i} \cdot A_{i,j})$$
$$= \sum_{j=1}^{n} (B^T \cdot A)_{j,j}$$

Tomar B^T y se obtiene el resultado.

iii) Como A es simétrica todo valor propio es real; sea λ un valor propio y $x \neq 0$ un vector propio asociado. Entonces

$$Ax = \lambda x, x \neq 0 \Rightarrow < Ax, x > = < \lambda x, x >$$
$$= \lambda < x, x > \geq 0$$

$\underline{\text{Como} < x, x >> 0} \Rightarrow \underline{\lambda \geq 0}$

iv) Si T es isomorfismo $\Rightarrow (A \cdot M = 0 \Rightarrow M = 0)$

Si A no fuese un isomorfismo existe $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, A \cdot u = 0$ luego si M es la matriz formada por u en cada columna se tiene que $A \cdot M = 0$ y $M \neq 0$.

Si A es invertible $\Rightarrow A \cdot M = 0 \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot M = A^{-1} \cdot 0$
$\Rightarrow M = 0$
$\Rightarrow T$ es inyectiva $\Rightarrow T$ es biyectiva pues T es lineal entre espacios de la misma dimensión.