U. DE CHILE

INGENIERIA

Pauta Control #6 MA11A Álgebra

Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile.

Semestre Primavera 2004

El objetivo de esta pauta es orientar la corrección de los ayudantes y dar al alumno una guía de estudio. Es *responsabilidad del alumno* tener una copia de esta pauta para el día de la revisión de su prueba. Esta se puede obtener en la página:
`http://www.dim.uchile.cl/~lmella/MA11A.html` en formato ps o pdf.

P1.- Considere la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -4 \\ 4 & -4 & -2 \end{bmatrix}.$$

a) (1.5 ptos.) Muestre que el polinomio característico de A es

$$p(\lambda) = (4-\lambda)(\lambda^2 - 36).$$

b) (3 ptos.) Encuentre una base ortonormal de vectores propios de A y explicite matrices P invertible y D diagonal (de 3×3) tales que $A = PDP^t$.

c) (0.5 ptos.) ¿Es A invertible? (Justifique).

d) (1 pto.) Determine cuáles de las siguientes matrices C son similares a A, es decir, cumplen $A = QCQ^{-1}$ para alguna matriz Q invertible:

$$i) \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad ii) \begin{bmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Justifique.

Pauta.

a) El polinomio característico de A viene dado por

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 4 \\ 1 & 3-\lambda & -4 \\ 4 & -4 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$

y desarrollando por la primera fila encontramos

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= (3-\lambda)((3-\lambda)(-2-\lambda) - 16) - ((-2-\lambda) + 16) + 4(-4 - 4(3-\lambda)) \\ &= (3-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 22) - 14 + \lambda - 64 + 16\lambda \\ &= -\lambda^3 + 4\lambda^2 + 36\lambda - 144. \end{aligned}$$

Ahora verifiquemos que este polinomio corresponde al del enunciado:

$$(4-\lambda)(\lambda^2 - 36) = 4\lambda^2 - 144 - \lambda^3 + 36\lambda = p(\lambda).$$

b) La matriz A es simétrica por lo que existe una base de vectores propios de A. Más aún, sabemos que vectores propios asociados a valores propios distintos son ortogonales entre sí. En este caso los valores propios de A son 4, 6, -6 por lo tanto todos distintos entre sí. Esto garantiza que los los vectores propios respectivos son ortogonales.

Vector propio asociado a $\lambda = 4$. Debemos encontrar el ker de $A - 4I$ para lo cual escalonamos la matriz

$$\begin{array}{rrr} -1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -4 \\ 4 & -4 & -6 \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{rrr} -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10. \end{array}$$

Escribiendo $x = (x_1, x_2, x_3)$ vemos que $x_3 = 0$ y $x_1 = x_2$. Luego el $\ker(A - 4I)$ está generado por el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

<u>Vector propio asociado a $\lambda = 6$</u>. Escalonamos $A - 6I$:

$$\begin{matrix} -3 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & -4 \\ 4 & -4 & -8 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} -3 & 1 & 4 \\ 0 & -8 & -8 \\ 0 & -8 & -8 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} -3 & 1 & 4 \\ 0 & -8 & -8. \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Tenemos $x_2 + x_3 = 0$ y $-3x_1 + x_2 + 4x_3 = 0$. Reemplazando $-3x_1 - 3x_2 = 0$, es decir $x_1 = -x_2 = x_3$. Por lo tanto $\ker(A - 6I)$ está generado por $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

<u>Vector propio asociado a $\lambda = -6$</u>. Escalonamos $A + 6I$:

$$\begin{matrix} 9 & 1 & 4 \\ 1 & 9 & -4 \\ 4 & -4 & 4 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} 9 & 1 & 4 \\ 0 & 80 & -40 \\ 0 & -40 & 20 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} 9 & 1 & 4 \\ 0 & 80 & -40. \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Encontramos $2x_2 = x_3$ y $9x_1 + x_2 + 4x_3 = 0$, y reemplazando $x_1 + x_2 = 0$. Luego $\ker(A + 6I)$ está generado por $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Por lo anterior

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

forman una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ y son vectores propios de A.

Para finalizar formamos una matriz con las columnas dadas por los vectores anteriores normalizados

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

y D la matriz diagonal

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}.$$

Entonces $P^{-1} = P^t$ y $A = PDP^t$

c) A es invertible ya que no tiene valores propios nulos.

d) *i)* C tiene los mismos valores propios que A y como estos son distintos, C es diagonalizable. Cuando dos matrices diagonalizables tienen los mismos valores propios son similares. Este último hecho puede utilizarse sin necesidad de demostrarlo, ya que normalmente se ve en clases. En todo caso se puede argumentar del siguiente modo: $C = RDR^{-1}$ para alguna matriz R invertible, con D la matriz diagonal definida en la parte b). Así $D = R^{-1}CR$ y luego $A = PR^{-1}C(PR^{-1})^{-1}$.

ii) En este caso los valores propios de C son 4 y 6 (con multiplicidad algebraica 2). Luego los valores propios de A y C no coinciden y por lo tanto A y C no pueden ser similares.

Puntaje.

a) 0.5 por conocer la definición de polinomio característico

   0.3 por saber utilizar propiedades del determinante

   0.7 por el resto

b) 0.8 por cada valor propio. En cada caso: 0.2 por plantear el problema de encontrar $\ker(A - \lambda I)$, 0.4 por resolver el sistema, 0.2 por encontrar un generador del espacio propio.

   0.6 por las matrices P y D

c) No se asigna puntaje sin justificar la respuesta.

d) 0.5 por cada matriz. Los argumentos pueden ser bien resumidos si se conoce algunos resultados que normalmente se ven en clases: dos matrices similares tienen los mismos valores propios, y matrices diagonalizables con los mismos valores propios son similares. Para el puntaje basta que el alumno sepa utilizar estos resultados.

P2.- Denotemos por $\mathcal{P}_2$ el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes en $\mathbb{R}$ de grado menor o igual que 2 y sea β la base canónica $\{1, x, x^2\}$ de este espacio. Considere

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) (2.5 ptos.) Encuentre la base β' de $\mathcal{P}_2$ tal que Q sea representante de la identidad de $\mathcal{P}_2$ con β' en $\mathcal{P}_2$ con β. Si le sirve, en términos de coordenadas

$$[p]_\beta = Q\ [p]_{\beta'} \qquad \forall p \in \mathcal{P}_2.$$

b) (2.5 ptos.) Sea $T : \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal cuya matriz representante con respecto a las bases β en $\mathcal{P}_2$ y canónica en $\mathbb{R}^3$ es la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calcule la matriz representante de T con respecto las bases β' en $\mathcal{P}_2$ y canónica en $\mathbb{R}^3$, donde β' es la base encontrada en a).

c) (1 pto.) Calcule $\dim \ker T$ y el rango de T.

Pauta.

a) Escribamos $\beta' = \{p_1, p_2, p_3\}$ con $p_i \in \mathcal{P}_2$. Como Q representa la identidad de $\mathcal{P}_2$ con β' en $\mathcal{P}_2$ con β, la primera columna de Q nos da los coeficientes del vector p_1 en la base β. Luego

$$p_1(x) = q_{11} \cdot 1 + q_{21} \cdot c + q_{31} \cdot x^2,$$

donde q_{ij} es el coeficiente de la fila i y la columna j de Q, es decir $Q = (q_{ij})_{i,j}$. En este caso

$$p_1(x) = x + x^2.$$

Similarmente

$$p_2(x) = q_{12} \cdot 1 + q_{22} \cdot c + q_{32} \cdot x^2 = 1,$$

y

$$p_3(x) = q_{13} \cdot 1 + q_{23} \cdot c + q_{33} \cdot x^2 = 3 + x^2.$$

Una manera equivalente de escribir lo anterior consiste en recordar el vector de coordenadas de un elemento $p \in \mathcal{P}_2$ en una cierta base. Por ejemplo $[p]_{\beta'} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ quiere decir que

$$p = \sum_{i=1}^{3} a_i p_i \qquad \beta' = \{p_1, p_2, p_3\}.$$

Como $[p_1]_{\beta'} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ de la fórmula $[p]_\beta = Q[p]_{\beta'}$ vemos que

$$[p_1]_\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

y esto dice que $p_1(x) = x + x^2$.

En conclusión $\beta' = \{x + x^2, 1, 3 + x^2\}$.

b) Utilizaremos la notación

$$(\mathcal{P}_2, \beta) \ \xrightarrow{T,A} \ (\mathbb{R}^3, \text{canónica})$$

para indicar que la transformación lineal T tiene representante A cuando en los espacios correspondientes se utiliza las bases indicadas. Lo anterior es lo mismo que escribir

$$(\mathbb{R}^3, \text{canónica}) \ \xleftarrow{T,A} \ (\mathcal{P}_2, \beta),$$

pero esta notación es mejor cuando componemos transformaciones ya que se considera A multiplicando por la izquierda los vectores de coordenadas. Buscamos la matriz B tal que

$$(\mathbb{R}^3, \text{canónica}) \ \xleftarrow{T,B} \ (\mathcal{P}_2, \beta')$$

y tenemos

$$(\mathcal{P}_2, \beta) \ \xleftarrow{I,Q} \ (\mathcal{P}_2, \beta').$$

Como $T = T \circ I$ con I la identidad de $\mathcal{P}_2$ en $\mathcal{P}_2$

$$(\mathbb{R}^3, \text{canónica}) \ \xleftarrow{T,A} \ (\mathcal{P}_2, \beta) \ \xleftarrow{I,Q} \ (\mathcal{P}_2, \beta').$$

En palabras: la matriz representante de T de $(\mathcal{P}_2, \beta')$ en $(\mathbb{R}^3, \text{canónica})$ es AQ, es decir el producto de la representante de T de $(\mathcal{P}_2, \beta)$ en $(\mathbb{R}^3, \text{canónica})$ y la representante de I de $(\mathcal{P}_2, \beta')$ en $(\mathcal{P}_2, \beta)$. Luego

$$B = AQ = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

c) Directamente vemos que el rango de A es dos con lo cual el rango de T es 2. Por el teorema del núcleo image deducimos que $\dim \ker T = 3 - 2 = 1$.

Puntaje.

En a) y b) es difícil describir el puntaje, por lo que solo se indican puntajes de referencia, para ciertos conceptos.

a) Para resolver esta parte es necesario entender qué significa que Q sea la representante de la identidad. Por evidencia de esto: 1 pto. Luego asignar 0.5 por cada vector de la base.

b) La solución de esta pauta está basada en la fórmula para la matriz representante de una composición de transformaciones lineales. Por conocer esta fórmula (o evidencia de que se sabe) 1 pto. Luego hay que aplicarla correctamente: es decir saber el orden en que hay que multiplicar las matrices y si es necesario invertir alguna. Castigar 0.5 por un error de este tipo.

c) 0.5 por el rango y 0.5 por la dimensión del ker de T. Aquí basta responder correctamente (la matriz es tan simple que por inspección se encuentre el rango).

P3.- a) Sea A una matriz de $n \times n$, $n \geq 3$ con coeficientes reales tal que $\dim \ker A \leq 2$ y su polinomio característico $p(\lambda)$ tiene la forma

$$p(\lambda) = \lambda^3 q(\lambda),$$

donde $q(\lambda)$ es un polinomio.

i) (2 ptos.) Pruebe que $\dim \ker A \geq 1$ y que el rango de A es menor o igual a $n-1$.

ii) (2 ptos.) Demuestre que A no es diagonalizable.

b) (2 ptos.) Sea A una matriz de $n \times n$ con coeficientes en $\mathbb{R}$ diagonalizable, es decir $A = PDP^{-1}$ con P invertible y D diagonal. Pruebe que A^t es diagonalizable y que las columnas de $(P^t)^{-1}$ forman una base de vectores propios de A^t.

Pauta.

a) *i*) Como $p(0) = 0$ tenemos que 0 es valor propio de A y por lo tanto A no es invertible. Luego $\dim \ker A \geq 1$. Utilizando el teorema del núcleo imagen

$$\dim \mathrm{Im} A = n - \dim \ker A \leq n - 1.$$

ii) La multiplicidad de 0 como raíz de $p(\lambda)$ es al menos 3 (no necesariamente igual a tres), luego la multiplicidad algebraica $m_a(0)$ de 0 es al menos 3. Por otro lado nos dicen que $\ker A$, el espacio propio asociado a 0, tiene dimensión a lo más 2, con lo cual la multiplicidad geométrica de 0 $m_g(0)$ es menor o igual que 2. Entonces $m_a(0) \neq m_g(0)$ con lo cual A no puede ser diagonalizable.

b) Tenemos $A = PDP^{-1}$ con P invertible y D diagonal. Tomando la transpuesta en esta igualdad resulta $A^t = (P^{-1})^t DP^t = (P^t)^{-1} DP^t$. Esta fórmula muestra que A^t es similar a una diagonal, luego diagonalizable. Más aún las columnas de $(P^t)^{-1}$ forman una base de vectores propios de A^t.

Puntaje.

a) i) 0.6 pto. por justificar que 0 es valor propio

0.6 por deducir que $\dim \ker A \geq 1$

0.8 por aplicar el teorema del núcleo imagen y deducir que el rango $\leq n-1$.

a) ii) 0.7 por "multiplicidad algebraica de 0 es ≥ 3"

0.7 por "multiplicidad geométrica de 0 es ≤ 2"

0.6 por la conclusión

b) 0.5 ptos por $A^t = (P^t)^{-1} DP^t$.

0.7 por deducir de aquí que A^t es diagonalizable.

0.8 por por observar que de la fórmula anterior las columnas de $(P^t)^{-1}$ son vectores propios de A^t. Forman una base porque $(P^t)^{-1}$ es invertible.