Pauta Control #6 MA11A Álgebra

Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile.
Semestre Primavera 2005

El objetivo de esta pauta es orientar la corrección de los ayudantes y dar al alumno una guía de estudio. Es *responsabilidad del alumno* tener una copia de esta pauta para el día de la revisión de su prueba. Esta se puede obtener en la página:
`http://www.dim.uchile.cl/~lmella/MA11A.html` en formato ps o pdf.

Pregunta 1.

a) (4,5 ptos.) Encuentre una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores propios de

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Dé matrices P y D tales que $A = PDP^t$.

b) (1,5 ptos.) Sean $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Si A es la matriz de la parte a) responda justificando apropiadamente :
¿Existe Q invertible tal que $A = QBQ^{-1}$?
¿Existe Q invertible tal que $A = QCQ^{-1}$?
¿Existe Q invertible tal que $B = QCQ^{-1}$?

Pauta.

a) Primero calculemos el polinomio característico de A :

$$\begin{aligned} det(A - \lambda I) &= det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (2-\lambda)\left((2-\lambda)^2 - 1\right) - ((2-\lambda)+1) - 1 - (2-\lambda) \\ &= (2-\lambda)(3 - 4\lambda + \lambda^2) - 6 + 2\lambda \\ &= 6 - 8\lambda + 2\lambda^2 - 3\lambda + 4\lambda^2 - \lambda^3 - 6 + 2\lambda \\ &= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda \\ &= -\lambda(\lambda^2 - 6\lambda + 9) = -\lambda(\lambda^2 - 3) \end{aligned}$$

Luego los valores propios de A son 3 con multiplicidad algebraica (m.a.) 2 y 0 con m.a. 1.

Encontremos los subespacios propios asociados a 0 y 3.

Valor propio 0: debemos resolver $Ax = 0$ lo que conduce a escalonar la matriz

$$\begin{array}{rrrl} 2 & 1 & 1 & \\ 1 & 2 & -1 & \text{(fila 2 * 2 - fila 1)} \\ 1 & -1 & 2 & \text{(fila 3 * 2 - fila 1)} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{rrr} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{rrr} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Escribiendo $x = (x_1, x_2, x_3)$ vemos que la ecuación $Ax = 0$ es equivalente a

$$\begin{aligned} 3x_2 - 3x_3 = 0 &\Longrightarrow x_2 = x_3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 &\Longrightarrow x_1 = -\frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 \\ &\Longrightarrow x_1 = -x_3 \end{aligned}$$

Luego una base de $Ker(A)$ está constituida por el vector

$$v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Valor propio 3: debemos resolver $(A - 3I)x = 0$ lo que conduce a escalonar la matriz

$$\begin{matrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{matrix} \quad \longrightarrow \quad \begin{matrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Escribiendo $x = (x_1, x_2, x_3)$ vemos que la ecuación $(A - 3I)x = 0$ es equivalente a

$$-x_1 + x_2 + x_3 = 0 \Longrightarrow x_1 = x_2 + x_3.$$

Una base del espacio $Ker(A - 3I)$ viene luego dada por

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para encontrar una base ortogonal de $Ker(A - 3I)$ aplicamos el método de Gram-Schmidt, es decir, buscamos reemplazar v_3 por un vector w combinación lineal de v_2 y v_3 que sea además ortogonal a v_2:

$$w = v_3 + \lambda v_2.$$

Haciendo producto interno con v_2 e imponiendo $\langle w, v_2 \rangle = 0$ llegamos a la siguiente ecuación para λ

$$0 = \langle v_3, v_2 \rangle + \lambda \langle v_2, v_2 \rangle$$

de donde despejamos

$$\lambda = -\frac{\langle v_3, v_2 \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} = -\frac{1}{2}.$$

Luego

$$w = v_3 - \frac{1}{2} v_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Tenemos entonces que v_1, v_2, w es base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ formada de vectores propios de A. Una base ortonormal se encuentra normalizando, y resulta

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Definido P como la matriz cuyas columnas son justamente los vectores anteriores, es decir

$$P = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

y D como la matriz diagonal

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

tenemos $A = PDP^t$.

b) Sabemos que si $A = QBQ^{-1}$ con Q invertible, entonces A es diagonalizable si y sólo si B lo es, y en este caso además tienen los mismos valores propios con las mismas multiplicidades.

La matriz B tiene valores propios 3 con m.a. 2 y 0 con m.a. 1.

Para ver si B es diagonalizable calculamos $Ker(B - 3I)$. $B - 3I$ queda

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{matrix}$$

y luego el sistema $(B - 3I)x = 0$ queda

$$\begin{aligned} -3x_3 = 0 &\Longrightarrow x_3 = 0 \\ x_2 = 0&. \end{aligned}$$

Así $Ker(B - 3I)$ está generado por el vector

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

por lo que este espacio tiene dimensión 1. Esto implica que B no es diagonalizable y se deduce que **no existe Q invertible tal que $A = QBQ^{-1}$**.

Veamos ahora si C es diagonalizable. Calculemos entonces $Ker(C - 3I)$:

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{matrix} \quad \longrightarrow \quad \begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

y luego el sistema de ecuaciones queda $x_3 = 0$. Claramente se tiene que la dimensión de $Ker(C - 3I)$ es 2. Como $\lambda = 0$ es valor propio de m.a. igual a 1 tenemos también que la multiplicidad geométrica de este valor propio es 1. Por lo tanto C es diagonalizable, con valores propios 0 (con m.a. 1) y 3 (con m.a. 2).

Por lo tanto, el mismo argumento anterior muestra que **no existe Q invertible tal que $B = QCQ^{-1}$**.

Finalmente como A y C son ambas diagonalizables con los mismos valores propios (incluyendo multiplicidad) vemos que **existe Q invertible tal que $A = QCQ^{-1}$**.

Puntaje

a)
- 0,8 cálculo del polinomio característico de A
- 0,5 valores propios
- 0,7 una base del subespacio propio asociado a 0
- 0,7 una base del subespacio propio asociado a 3
- 0,8 método de Gram-Schmidt para encontrar una base ortogonal de $Ker(A - 3I)$.
- 0,5 base ortonormal de vectores propios
- 0,5 matrices P y D

b)
- 0,3 se necesita conocer el siguiente teorema: si $A = QBQ^{-1}$ entonces A es diagonalizable si y sólo si B lo es y ambas matrices tienen los mismos valores propios (repetidos de acuerdo a su multiplicidad)
- 0,2 se necesita la siguiente versión de la recíproca: si A, C son diagonalizables con los mismos valores propios entonces existe Q invertible tal que $A = QCQ^{-1}$.
- 0,2 determinar que B no es diagonalizable
- 0,2 determinar que C es diagonalizable
- 0,2 respuesta a la pregunta con A y B

- 0,2 respuesta a la pregunta con A y C
- 0,2 respuesta a la pregunta con B y C

Pregunta 2. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que su matriz representante con respecto a la base

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

(en el espacio de partida y en el de llegada) sea

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) (4 ptos.) Encuentre la matriz N representante de T con respecto a la base canónica (en el espacio de partida y en el de llegada).

b) (1 pto.) ¿Existen bases $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ de $\mathbb{R}^3$ tales que la representante de T con respecto a $\mathcal{B}_1$ en la partida y $\mathcal{B}_2$ en la llegada sea $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$? Justifique.

c) (1 pto.) Pruebe que M no es diagonalizable y concluya que N tampoco lo es (justifique).

Pauta.

a) Una forma de resolver este ejercicio consiste en encontrar la matriz de pasaje de la base $\mathcal{A}$ a la canónica, es decir, la matriz que representa la función identidad cuando en la partida tenemos la base $\mathcal{A}$ y en la llegada la base canónica. Esta matriz viene dada por

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

La inversa, Q^{-1}, permite pasar de la base canónica a la base $\mathcal{A}$. Luego la matriz N buscada puede expresarse

$$N = QMQ^{-1}.$$

Calculemos Q^{-1} escalonando la matriz Q aumentada por la identidad

$$\begin{array}{rrrcrrrl} 1 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & \\ 3 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 & \text{(fila 2 - 3* fila 1)} \\ 2 & -1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 & \text{(fila 3 - 2* fila 1)} \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{rrrcrrrl} 1 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & -2 & 1 & | & -3 & 1 & 0 & \\ 0 & -3 & 1 & | & -2 & 0 & 1 & \text{(2*fila 3 - 3* fila 2)} \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{rrrcrrrl} 1 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & -2 & 1 & | & -3 & 1 & 0 & \text{(fila 2 + fila 3)} \\ 0 & 0 & -1 & | & 5 & -3 & 2 & \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{rrrcrrrl} 1 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & \text{(2*fila 1 + fila 2)} \\ 0 & -2 & 0 & | & 2 & -2 & 2 & \\ 0 & 0 & -1 & | & 5 & -3 & 2 & \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{rrrcrrrl} 2 & 0 & 0 & | & 4 & -2 & 2 & (*\frac{1}{2}) \\ 0 & -2 & 0 & | & 2 & -2 & 2 & (* -\frac{1}{2}) \\ 0 & 0 & -1 & | & 5 & -3 & 2 & (* -1) \end{array}$$

y llegamos a

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -5 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Ahora calculemos MQ^{-1}:

$$MQ^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -5 & 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y finalmente

$$N = QMQ^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Si existieran bases $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ tales que la matriz representante de T con respecto a $\mathcal{B}_1$ en la partida y $\mathcal{B}_2$ en la llegada, se podrían encontrar matrices E, y F invertibles tales que $M = E \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} F$ (E, F son matrices de cambio de base). Pero entonces el rango de M, que es 2, sería igual al rango de $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, que es 1. Esto no es posible y luego la respuesta a la pregunta es que no existen bases $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ con la propiedad mencionada.

c) Verifiquemos que M no es diagonalizable. Los valores propios de M son 1 con multiplicidad algebraica (m.a.) 2 y 0 con m.a. 1. Calculemos el subespacio propio $Ker(M - I)$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Escribiendo $x = (x_1, x_2, x_3)$, el sistema $(M - I)x = 0$ queda

$$x_2 = 0, \quad -x_3 = 0.$$

Luego $Ker(M - I)$ está generado por un vector solamente y tiene por lo tanto dimensión 1. Por esto M no es diagonalizable.

Se concluye que N tampoco es diagonalizable, ya sabiendo que $N = QMQ^{-1}$ se tiene que M es diagonalizable si y sólo si N es diagonalizable.

Puntaje.

a) Hay al menos dos formas de resolver esta pregunta. Para la que se plantea en esta pauta el puntaje es

- 0,5 identificar la matriz de cambio de base Q a partir de los vectores de la base de $\mathcal{A}$.
- 0,5 fórmula $N = QMQ^{-1}$
- 1,5 cálculo de Q^{-1}
- 1,5 cálculo de QMQ^{-1}

Otra forma de resolver este problema, consiste en dado $x = (x_1, x_2, x_3)$ cualquiera

- 1,5 expresar x como combinación lineal de los vectores de $\mathcal{A}$ (esto en cálculo es similar a encontrar Q^{-1})

- 1,5 utilizar la descomposición anterior y la matriz M para calcular Tx
- 1,0 utilizar el resultado anterior para encontrar la matriz N

Un esquema similar al anterior se puede utilizar, pero esta vez el vector x representa cada uno de los vectores de la base canónica

- 1,5 expresar cada vector de la base canónica como combinación lineal de los vectores de $\mathcal{A}$
- 1,5 calcular Te_i para cada vector e_i de la base canónica
- 1,0 encontrar la matriz N

b)
- 0,3 relacionar el hecho de que existan bases $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ con las propiedades del enunciado con escribir $M = E \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} F$ con E, F invertibles
- 0,2 esta relación preserva el rango
- 0,5 M tiene rango 2 y la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ tiene rango 1, y conclusión

c)
- 0,4 encontrar $Ker(M - I)$
- 0,3 M no es diagonalizable
- 0,3 N no es diagonalizable

Pregunta 3.

a) Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una transformación lineal.

i) (1 pto.) Verifique que

$$Im(T^2) \subseteq Im(T) \quad \text{y} \quad Ker(T^2) \supseteq Ker(T).$$

($Ker(T)$ es lo mismo que el núcleo de T. $\quad T^2 = T \circ T$.)

ii) (2 ptos.) Demuestre que

$$Im(T^2) = Im(T) \quad \Longrightarrow \quad Ker(T^2) = Ker(T).$$

Ind.: le puede servir el teorema núcleo imagen.

b) Sean A, B matrices de $n \times n$ con coeficientes reales tales que $AB = BA$.

i) (1 pto.) Pruebe que si $Bv \neq 0$ y v es vector propio de A asociado a λ entonces Bv también lo es.

ii) (1 pto.) Suponiendo que los valores propios de A son distintos entre sí, muestre que si v es vector propio de A entonces v es vector propio de B.

iii) (1 pto.) Concluya que si los valores propios de A son distintos entre sí entonces B es diagonalizable.

Pauta.

a) i) Notemos que $T^2 = T \circ T$ es una transformación lineal.
Probaremos primero que $Im(T^2) \subseteq Im(T)$. Sea $y \in Im(T^2)$. Entonces existe $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $y = T^2x = T(Tx)$. Escribiendo $z = Tx$ vemos que $y = Tz \in Im(T)$.
Para probar $Ker(T) \subseteq Ker(T^2)$ consideremos $x \in Ker(T)$. Entonces $Tx = 0$ y por lo tanto $T^2x = T(Tx) = 0$ por lo que $x \in Ker(T^2)$.

ii) Utilizando el teorema núcleo imagen tenemos
$$dim(Ker(T)) + dim(Im(T)) = n$$
y también
$$dim(Ker(T^2)) + dim(Im(T^2)) = n.$$
Por hipótesis $Im(T) = Im(T^2)$ lo que implica $dim(Im(T)) = dim(Im(T^2))$. Esto y las dos ecuaciones anteriores aseguran que
$$dim(Ker(T)) = dim(Ker(T^2)).$$
Pero tenemos la inclusión $Ker(T) \subseteq Ker(T^2)$ por lo que se deduce que $Ker(T) = Ker(T^2)$.

b) i) Si v es vector propio asociado a λ tenemos
$$Av = \lambda v.$$
Multiplicando por B a ambos lados encontramos
$$BAv = \lambda Bv.$$
Pero $BAv = ABv$ por lo que
$$ABv = \lambda Bv.$$
Por hipótesis $Bv \neq 0$ y luego Bv es vector propio de A asociado a λ.

ii) Sea v un vector propio de A asociado al valor propio λ. Tenemos entonces dos casos: $Bv = 0$ o Bv es también vector propio de A con valor propio λ. En ambos casos Bv pertenece al subespacio propio $Ker(A - \lambda I)$.

Al ser los valores propios de A distintos entre sí, el subespacio propio $Ker(A-\lambda I)$ tiene dimensión 1 y está generado por el vector propio v. Como $Bv \in Ker(A - \lambda I)$ tenemos por lo tanto que Bv es proporcional a v, es decir existe $\alpha \in \mathbb{R}$ (quizá $\alpha = 0$) tal que $Bv = \alpha v$. Esto implica que v es vector propio de B.

iii) Como todos los valores propios de A son distintos entre sí sabemos que A es diagonalizable, es decir, existe una base $\{v_1, \dots, v_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ formada por vectores propios de A .

Por la parte anterior los vectores $v_1, \dots, v_n$ son vectores propios de B. Luego $\{v_1, \dots, v_n\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$ formada por vectores propios de B, por lo que B es diagonalizable.

Puntaje.

a) i)
- 0,5 $Im(T^2) \subseteq Im(T)$
- 0,5 $Ker(T^2) \supseteq Ker(T)$

ii)
- 0,5 usar el teorema núcleo-imagen con T
- 0,5 usar el teorema núcleo-imagen con T^2
- 0,5 deducir $dim(Ker(T)) = dim(Ker(T^2))$.
- 0,5 deducir $Ker(T) = Ker(T^2)$

b) i)
- 0,3 utilizar correctamente el que v sea vector propio de A
- 0,4 multiplicar por B y darse cuenta que la $AB = BA$ es útil
- 0,3 concluir

ii)
- 0,2 observar que Bv está en el espacio propio $Ker(A - \lambda I)$
- 0,4 observar que $Ker(A - \lambda I)$ está generado por v
- 0,4 concluir que Bv es proporcional a v y luego v es vector propio de B

iii)
- 0,2 saber que si los valores propios de A son distintos entre sí entonces A es diagonalizable
- 0,5 mostrar que la misma base de vectores propios de A es base de vectores propios de B
- 0,3 concluir