Pauta Control 6 MA11A ALGEBRA
Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile
4 de Noviembre de 2006

Problema 1

i) Encuentre la matriz representante B de la función g con respecto a las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$ respectivamente.

Se sabe que la matriz representante con respecto a las bases canónicas, es la matriz asociada a g.

Así,

$$g\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - x_3 \\ 2x_1 + x_3 \end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Entonces $M_{\beta_{\mathbb{R}^3}\beta_{\mathbb{R}^2}}(g) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = B$

(2.0 ptos)

OTRA FORMA

También para $x \in \mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ el vector se presenta referido a la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Así

$$g\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 g\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 g\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 g\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (g \text{ es lineal })$$

y

$$g\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, g\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, g\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

por lo tanto

$$g\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

por lo tanto

$$M_{\beta_{\mathbb{R}^3}\beta_{\mathbb{R}^2}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B$$

ii) Se pide encontrar la matriz representante de $g \circ f$ con respecto a la base B_1 en $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ y a la base canónica en $\mathbb{R}^2$

$$f : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3 \text{ y } g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$

Se pide $M_{B_1\tau\mathbb{R}^2}(g \circ f)$ en que $\tau =$ Base Canónica.

$$M_{B_1\tau\mathbb{R}^2}(g \circ f) = M_{B\tau}(g)M_{B_1B}(f)$$

donde B es una base de $\mathbb{R}^3$.

Como $B = M_{\tau_{\mathbb{R}^3}\tau_{R^2}}(g)$ y $A = M_{B_1B_2}(f)$ se requiere encontrar una matriz de cambio de base (matriz de pasaje) que permite usar A y B

Entonces

$$M_{B_1\tau_{\mathbb{R}^2}}(g \circ f) = M_{\tau_{\mathbb{R}^3}\tau_{\mathbb{R}^2}}(g) \circ P_{B_2\tau_{\mathbb{R}^3}}(id) \cdot M_{B_1B_2}(f)$$

(2 ptos.)

Así $M_{B_1\tau_{\mathbb{R}^2}}(g \circ f) = B \cdot P \cdot A$ en que $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ se encontró en (i) y $P_{B_2\tau\mathbb{R}^3}(id) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ es la matriz cuyas columnas son los vectores de la base B_2 de $\mathbb{R}^3$ dada.

Entonces

$$M_{B_1\tau_{\mathbb{R}^2}}(g \circ f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Entonces $M_{B_1\tau_{\mathbb{R}^2}}(g \circ f) = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ (2.0 ptos.)

OTRA FORMA

Se puede calcular directamente la imagen por f de cada matriz de la base B_1 puesto que la matriz representante A nos proporciona (en cada columna) los coeficientes en la base B_2. Así

$$f\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = 1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$f\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = 1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = 1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} = 1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(1.5 ptos.)

Entonces cada imagen de la composición $g \circ f$ nos dará

$$g \circ f \left[\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{array} \right] = g \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}; g \circ f \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{array} \right] = g \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$g \circ f \left[\begin{array}{cc} 0 & 3 \\ 0 & -1 \end{array} \right] = g \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}; g \circ f \left[\begin{array}{cc} 2 & 5 \\ 2 & -4 \end{array} \right] = g \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(1.5 ptos.)

Así, al ser la base de llegada la canónica en $\mathbb{R}^2$, los vectores determinados son las columnas de la matriz representante $M_{B_1 \tau_{\mathbb{R}^2}}(g \circ f)$. Así

$$M_{B_1 \tau_{\mathbb{R}^2}}(g \circ f) = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

(1.0 pto.)

Pauta Problema 2

i) Encontrar la base del subespacio propio asociado a $\lambda = -6$, es decir, base del $Ker(A+6I)$ y determinar las dimensiones de los subespacios asociados a ambos valores propios.

Se sabe que A es diagonalizable y para $\lambda = -6$ la ecuación de vectores propios conduce a $(A+6I)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_6 \end{pmatrix} = 0$ que queda como

$$\begin{pmatrix} 12 & 8 & -12 & -8 & 12 & -24 \\ 12 & -4 & -12 & -8 & 0 & 12 \\ 0 & 12 & 0 & 0 & 12 & -36 \\ 12 & -4 & -12 & -8 & 0 & 12 \\ 24 & 4 & -24 & -16 & 12 & -12 \\ 12 & -4 & -12 & -8 & 0 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 12 & 8 & -12 & -8 & 12 & -24 \\ 0 & -12 & 0 & 0 & -12 & 36 \\ 0 & 12 & 0 & 0 & 12 & -36 \\ 0 & -12 & 0 & 0 & -12 & 36 \\ 0 & -12 & 0 & 0 & -12 & 36 \\ 0 & -12 & 0 & 0 & -12 & 36 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 12 & 8 & -12 & -8 & 12 & -24 \\ 0 & -12 & 0 & 0 & -12 & 36 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1.0 pto.)

quedan 4 variables libres de modo que, por ejemplo, si $x_6 = \alpha, x_5 = \beta, x_4 = \gamma$ y $x_3 = \delta$ podemos plantear según la segunda línea $x_2 = 3x_6 - x_5 = 3\alpha - \beta$ y de la primera línea $3x_1 = 6\alpha - 3\beta + 2\gamma + 3\delta - 2(3\alpha - \beta)$. Entonces $x_1 = \frac{-\beta+2\gamma+3\delta}{3} \wedge x_2 = 3\alpha - \beta$. Entonces, por ejemplo, para $\alpha = 1, \beta = \gamma = \delta = 0$ el vector es $(0,3,0,0,0,1)$

para $\alpha = 0 = \gamma = \delta \wedge \beta = 3 \to (-1,-3,0,0,3,0)$

para $\delta = \beta = \delta = 0 \wedge \gamma = 3 \to (2,0,0,3,0,0)$

para $\delta = \beta = \gamma = 0 \wedge \delta = 1 \to (101000)$

Así, una base del $Ker(A+6I)$ es $\{(0,3,0,0,0,1),(-1,-3,0,0,3,0),(2,0,0,3,0,0),(1,0,1,0,0,0)\}$

(1.5 ptos.)

Entonces $Dim(W-6) = 4$ (Dimensión del espacio propio). Además, como A es diagonalizable, $\mathbb{R}^6$ admite una base de vectores propios de A, de modo que $Dim(W_6) = 2$ (dimensión complementaria) puesto que $W_{-6} \oplus W_6 = \mathbb{R}^6$

(0.5 ptos.)

ii) Encontrar una matriz diagonal D similar a A, es decir $A = PDP^{-1}$ con P invertible.

Como A es diagonizable, es similar a una matriz diagonal. Así, $A = PDP^{-1}$ con

$$D = \begin{pmatrix} 6 & & & & & 0 \\ & 6 & & & & \\ & & -6 & & & \\ & & & -6 & & \\ & & & & -6 & \\ & & & & & -6 \end{pmatrix} \text{ por ejemplo.}$$

(0.8 ptos.)

o cualquier otra matriz diagonal, permutando la posición en la diagonal de los valores propios.

iii) Determinar $P(\lambda)$, polinomio característico de A.

Como A es diagonalizable y 6 y -6 son sus valores propios, el polinomio característico solo puede tener los factores $P(\lambda) = (\lambda + 6)^m(\lambda - 6)^k$ tal que $m + k = 6$. Además por (i) $Dim(Ker(A + GI)) = 4$ y $Dim(Ker(A - GI)) = 2$. Así, $P(\lambda) = (\lambda + 6)^4(\lambda - 6)^2$.

(0.7 ptos.)

iv) Explique porque A es invertible. Una matriz diagonalizable es invertible ssi sus valores propios son todos distintos de cero.

En este caso $6 \neq 0 \neq -6$ y por lo tanto $A = PDP^{-1}$ es invertible.

(0.7 ptos.)

v) Encontrar una matriz $\tilde{D}$ similar a A^{-1}, es decir $A^{-1} = P\tilde{D}P^{-1}$ con P invertible. Como

$$\begin{aligned} A = PDP^{-1} \quad &\Rightarrow A^{-1} = (PDP^{-1})^{-1} = (P^{-1})^{-1}D^{-1}P^{-1} \\ &\Rightarrow A^{-1} = PD^{-1}P^{-1} = P\tilde{D}P^{-1} \end{aligned}$$

Sigue que $\tilde{D} = D^{-1}$ y entonces la matriz $\tilde{D}$ similar a A^{-1} es

$$\tilde{D} = D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/6 & & & & & 0 \\ & 1/6 & & & & \\ & & -1/6 & & & \\ & & & -1/6 & & \\ & & & & -1/6 & \\ & & & & & -1/6 \end{pmatrix}$$

(0.8 ptos.)

Pauta Problema 3

i) Sean $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ y A invertible. Muestre que si λ es valor propio de BA entonces λ es v.p. de AB.

Sea λ valor propio de AB, entonces $(AB)v = \lambda v, v \in \mathbb{R}^n$. Como A es invertible $ABv = \lambda v / A^{-1} \Rightarrow Bv = \lambda A^{-1}v$ y considerando $I = AA^{-1}$ podemos escribir

(0.5 ptos.)

$(BI)v = \lambda A^{-1}v \Rightarrow (BAA^{-1})v = \lambda A^{-1}v$ asociando $(BA)(A^{-1}v) = \lambda(A^{-1}v)$ luego si $w = A^{-1}v$ queda $(BA)w = \lambda w$, y esto prueba que λ es valor propio de BA.

(1.5 ptos.)

ii) Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ diagonalizable y tal que $\exists k \in \mathbb{N}, A^k = 0$. Entonces encuentre A (Justifique)

Si A es diaginalizable $A = PDP^{-1} \Rightarrow A^k = (PDP^{-1})^k = PD^kP^{-1}$.

(1.0 pto.)

y $A^k = 0 \Rightarrow PD^kP^{-1} = 0$ con P invertible no nula, por lo tanto

$$D^k = 0 = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_i^k = 0 \quad \forall i$$

(1.0 pto.)

Entonces $A = 0$ es la matriz pedida.

iii) Sean A, B matrices diagonalizables con la misma base $\beta = \{v_1, ..., v_n\}$. Si $\lambda_1, ..., \lambda_n$ son los valores propios de A y $u_1, ..., u_n$ los de B es decir $Av_i = \lambda_i v_i$ y $Bv_i = \mu_i v_i$ $\forall i$, se pide encontrar los valores propios de $A^3 + 2B$.

Sea sabe que $(A^3 + 2B)v_i = A^3 v_i + 2Bv_i$. Pero

$$\begin{aligned} A^3 v_i &= AA(Av_i) = AA(\lambda_i v_i) = A(\lambda_i(\lambda_i v_i) = A(\lambda_i^2 v_i) \\ &= \lambda_i(\lambda_i^2 v_i) = \lambda_i^3 v_i \end{aligned}$$

(1.0 pto.)

También $(2B)v_i = 2(Bv_i) = 2(\mu_i v_i) = 2u_i v_i$. Sigue que $(A^3 + 2B)v_i = \lambda_i^3 v_i + 2\mu_i v_i = (\lambda_i^3 + 2u_i)v_i$. Entonces los valores propios de $A^3 + 2B$ son para cada vector propio $v_i : \lambda_i^3 + 2u_i$.

(1.0 pto.)