MA-11A Álgebra **9 de Agosto, 2001**

Pauta Control Recuperativo

PROBLEMA 1:

(i).- Como $z = \mathbb{R}e(z) + i\mathbb{I}m(z)$, sigue que $|z - \mathbb{R}e(z)| = |i\mathbb{I}m(z)| = |\mathbb{I}m(z)|$. Además, $(\mathbb{I}m(z))^2 = |\mathbb{I}m(z)|^2$. Luego,

$$|z - \mathbb{R}e(z)| = (\mathbb{I}m(z))^2 \iff |\mathbb{I}m(z)| = |\mathbb{I}m(z)|^2 .$$

Por lo tanto, $\mathbb{I}m(z) = 0$ o $|\mathbb{I}m(z)| = 1$, i.e., $\mathbb{I}m(z) \in \{-1, 0, +1\}$. En palabras, z pertenece a una de las tres rectas paralelas al eje real que intersectan al eje imaginario en $-i$, 0 y $+i$ como se muestra en la Fig. 1.

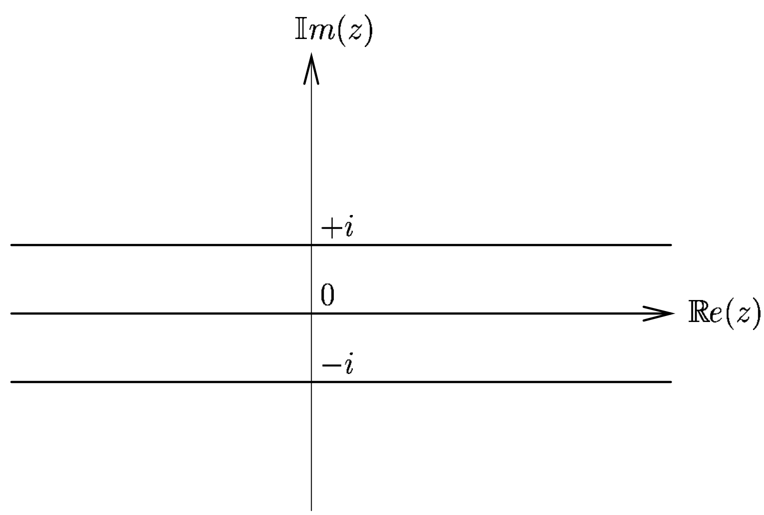

Figura 1: Conjunto solución de $|z - \mathbb{R}e(z)| = (\mathbb{I}m(z))^2$.

(ii.1).- Supongamos que A y B con las características deseadas existen.

Por el Teorema Fundamental del Álgebra, dado que Q tiene grado 2, raíces α y β y es mónico, se tiene que $Q(X) = (X - \alpha)(X - \beta)$ para todo $X \in \mathbb{C}$. Luego, para todo $X \in \mathbb{C} \setminus \{\alpha, \beta\}$,

$$\frac{A}{X - \alpha} + \frac{B}{X - \beta} = \frac{P(X)}{(X - \alpha)(X - \beta)} .$$

Multiplicando toda la expresión por $(X - \alpha)(X - \beta)$, nos queda que para todo $X \in \mathbb{C} \setminus \{\alpha, \beta\}$,

$$A(X - \beta) + B(X - \alpha) = P_0 + P_1 X .$$

Luego, $-(A\beta + B\alpha) + (A+B)X$ y $P_0 + P_1X$ son polinomios que coinciden en una infinidad de valores de X. Por resultado visto, $-(A\beta + B\alpha) + (A+B)X$ y $P_0 + P_1X$ deben ser iguales coeficiente a coeficiente, i.e., $A\beta + B\alpha = -P_0$ y $A + B = P_1$. Despejando se obtiene que $B = -(P_0 + \beta P_1)/(\alpha - \beta)$ y que $A = (P_0 + \alpha P_1)/(\alpha - \beta)$.

Para verificar que A y B cumplen las propiedades deseadas observamos que

$$\begin{aligned}
\frac{A}{X-\alpha} + \frac{B}{X-\beta} &= \frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{(P_0+\alpha P_1)(X-\beta) - (P_0+\beta P_1)(X-\alpha)}{(X-\alpha)(X-\beta)}\right) \\
&= \frac{-P_0(\beta-\alpha) + P_1X(\alpha-\beta)}{(\alpha-\beta)Q(X)} \\
&= \frac{P(X)}{Q(X)}\,.
\end{aligned}$$

(ii.2).- Basta tomar $P(X) = 1$ y observar que si

$$\frac{A}{X-\alpha} + \frac{B}{X-\beta} = \frac{P(X)}{Q(X)}\,,$$

entonces $(A+B)/(X-\alpha) = 1/(X-\alpha)^2$ para todo $X \in \mathbb{C} \setminus \alpha$, i.e., $(X-\alpha)(A+B) = 1$. Lo anterior es imposible ya que el polinomio del lado izquierdo de la anterior igualdad no puede ser de grado 0 como lo es el del lado derecho.

PROBLEMA 2:

(i).- Si $n = 0$, entonces

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{n-k} a_{i+k} = \sum_{k=0}^{n} a_0 = a_0 = 1a_0 = \sum_{j=0}^{n}(j+1)a_j\,.$$

Asumimos como hipótesis inductiva que $\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{n-k} a_{i+k} = \sum_{j=0}^{n}(j+1)a_j$ se verifica para n.

Hay dos alternativas para desarrollar la inducción.

- **Primera Forma**: Observando que,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1}\sum_{i=0}^{n+1-k} a_{i+k} &= \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{n+1-k} a_{i+k}\right) + \sum_{i=0}^{0} a_{i+n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{n+1-k} a_{i+k}\right) + a_{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{n-k} a_{i+k} + a_{n+1}\right) + a_{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{n-k} a_{i+k} + (n+2)a_{n+1}\,.
\end{aligned}$$

  Luego, por hipótesis inductiva,

$$\sum_{k=0}^{n+1}\sum_{i=0}^{n+1-k} a_{i+k} = \sum_{j=0}^{n}(j+1)a_j + (n+2)a_{n+1} = \sum_{j=0}^{n+1}(j+1)a_j\,.$$

Lo que concluye la inducción.

- **Segunda Forma**: Observando que,

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1}\sum_{i=0}^{n+1-k} a_{i+k} &= \sum_{k=0}^{n+1}\left(\sum_{i=0}^{n-k} a_{i+k} + a_{n+1}\right)\\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\left(\sum_{i=0}^{n-k} a_{i+k}\right) + (n+2)a_{n+1}\\
&= \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{n-k} a_{i+k} + a_{n+1}\right) + (n+2)a_{n+1}\,.
\end{aligned}
$$

Luego, por hipótesis inductiva,

$$
\sum_{k=0}^{n+1}\sum_{i=0}^{n+1-k} a_{i+k} = \sum_{j=0}^{n}(j+1)a_j + (n+2)a_{n+1} = \sum_{j=0}^{n+1}(j+1)a_j\,.
$$

Lo que concluye la inducción.

(ii).- Si $n=0$, entonces $\binom{n}{i} = 0$ salvo cuando $i=0$. Luego,

$$
\sum_{i\in\mathbb{Z}}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i} = \binom{0}{0}\binom{m}{k} = \binom{0+m}{k} = \binom{n+m}{k}\,.
$$

Supongamos entonces que $\sum_{i\in\mathbb{Z}}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k}$ se verifica para n. Por indicación,

$$
\begin{aligned}
\sum_{i\in\mathbb{Z}}\binom{n+1}{i}\binom{m}{k-i} &= \sum_{i\in\mathbb{Z}}\left(\binom{n}{i}+\binom{n}{i-1}\right)\binom{m}{k-i}\\
&= \sum_{i\in\mathbb{Z}}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i} + \sum_{i\in\mathbb{Z}}\binom{n}{i-1}\binom{m}{(k-1)-(i-1)}\,.
\end{aligned}
$$

Luego, haciendo el cambio de variable $i \leftarrow i-1$ en la segunda sumatoria y aplicando la hipótesis inductiva a cada una de las sumatorias que se obtienen, se concluye que

$$
\begin{aligned}
\sum_{i\in\mathbb{Z}}\binom{n+1}{i}\binom{m}{k-i} &= \sum_{i\in\mathbb{Z}}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i} + \sum_{i\in\mathbb{Z}}\binom{n}{i}\binom{m}{(k-1)-i}\\
&= \binom{n+m}{k} + \binom{n+m}{k-1}\\
&= \binom{n+1+m}{k}\,,
\end{aligned}
$$

donde la última igualdad es nuevamente consecuencia de la indicación.

PROBLEMA 3:

(i).- Como G es finito, $|G| < +\infty$. Si $f : \mathbb{N} \to G$ fuese inyectiva se tendría que $+\infty > |G| \geq |\mathbb{N}| = +\infty$, una contradicción. Luego, f debe ser inyectiva.

Como f no es inyectiva deben existir $s, t \in \mathbb{N}$ tales que $h^s = h^t$ y $s \neq t$. Sin perdida de generalidad asumamos que $s > t$. Luego, existe $m = s - t > 0$ tal que $h^m = h^s h^{-t} = e$ como se quería demostrar.

(ii.1).- Sea $h \in H$. De (i) sabemos que existe $m > 0$ tal que $h^m = e$. Luego, $h^{m-1} * h = h * h^{m-1} = h^m = e$, i.e., h^{m-1} es el inverso de h. Pero como H es cerrado para $*$ y $h \in H$ se tiene que $h^{m-1} = \underbrace{h * \ldots * h}_{m-1 \text{ veces}} \in H$.

Nota: Un caso particular es cuando $m = 1$. Aquí, se tiene que $h = e$. Como $h \in H$, sigue que $e \in H$. Como el inverso de $h = e$ es $h^{-1} = e \in H$, se tiene que $h^{-1} \in H$.

(ii.2).- Por hipótesis tenemos que $*$ es ley de composición interna sobre H. La asociatividad de $*$ en H se hereda de la asociatividad de $*$ en G.

Hay dos formas de ver que el neutro e está en H.

- **Primera Forma**: Como $H \neq \emptyset$, existe un $h \in H$. Por (i), hay un $m > 0$ tal que $h^m = e$. Como $h^m = \underbrace{h * \ldots * h}_{m \text{ veces}}$ y por hipótesis $*$ es cerrada sobre H se tiene que $e = h^m \in H$.
- **Segunda Forma**: Como $H \neq \emptyset$, existe un $h \in H$. Por (ii.1) sabemos que $h^{-1} \in H$. Luego, $e = h * h^{-1} \in H$ puesto que por hipótesis $*$ es cerrada sobre H.

Finalmente, (ii.1) garantiza que los inversos de los elementos en H están en H. Luego, H reune todas las condiciones para ser subgrupo de G.