MA-11A Algebra **4 de Julio, 2000**

Pauta Control Recuperativo

PROBLEMA 1:

(i).- Veamos primero la demostración por inducción. Si $n = 1$, entonces

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k} a_i \;=\; a_1\,, \qquad \text{y} \qquad \sum_{i=1}^{n}(n-i+1)a_i \;=\; a_1\,.$$

Luego, se tiene la base de la inducción. Asumamos que la identidad se tiene para n y verifiquemos que se satisface para $n+1$. En efecto,

$$\sum_{k=1}^{n+1}\sum_{i=1}^{k} a_i \;=\; \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k} a_i + \sum_{i=1}^{n+1} a_i \;=\; \sum_{i=1}^{n}(n-i+1)a_i + \sum_{i=1}^{n+1} a_i\,.$$

Observemos ahora que si $i = n+1$, entonces $n-i+1 = 0$, luego

$$\sum_{i=1}^{n}(n-i+1)a_i \;=\; \sum_{i=1}^{n+1}(n-i+1)a_i\,.$$

Sigue que

$$\sum_{k=1}^{n+1}\sum_{i=1}^{k} a_i \;=\; \sum_{i=1}^{n+1}\left((n-i+1)a_i + a_i\right) \;=\; \sum_{i=1}^{n+1}((n+1)-i+1)a_i\,.$$

Concluyendo así la demostración inductiva.

Finalmente, observar que aplicando la identidad recién demostrada con $a_i = 1/i$ se obtiene que

$$\sum_{k=1}^{n} H_k \;=\; \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i} \;=\; \sum_{i=1}^{n}(n-i+1)\frac{1}{i} \;=\; (n+1)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{n} 1 \;=\; (n+1)H_n - n\,.$$

(ii).- Observar que $k^2+1 = k(k+1)-(k-1)$. Luego, $(k^2+1)k! = k(k+1)k! - (k-1)k! = k(k+1)! - (k-1)k!$. Sigue que, por propiedad telescópica de la sumatoria,

$$\sum_{k=1}^{n}(k^2+1)k! \;=\; n(n+1)!\,.$$

PROBLEMA 2:

(i).- Supongamos que $z = a + bi \in \mathbb{C}$ es tal que $|z| = |z-\alpha|$, donde $\alpha \in \mathbb{R}$. Sigue que la parte real e imaginaria de $z-\alpha$ es $a-\alpha$ y b respectivamente. Por lo tanto, como $|z|^2 = |z-\alpha|^2$, deducimos que $a^2+b^2 = (a-\alpha)^2+b^2$. Despejando obtenemos que $a^2 = (a-\alpha)^2$, i.e., $2a\alpha = \alpha^2$. Como

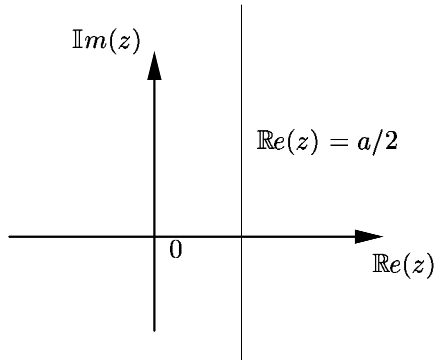

Figura 1:

$\alpha \neq 0$, sigue que $a = \alpha/2$. Hemos concluido que todas las soluciones de $|z| = |z - \alpha|$ pertenecen a la recta $L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x = \alpha/2\}$. La Figura 1 muestra la recta del plano cartesiano donde se encuentran las soluciones de $|z| = |z - \alpha|$.

(ii).- Supongamos que $((z+1)/z)^n = 1$. Sea $w = (z+1)/z$. Sigue que $w^n = 1$, i.e., w es raíz n-ésima de la unidad. Luego, $w = e^{2\pi k i/n}$ para algún $k \in \{0, \ldots, n-1\}$. Como $w = (z+1)/z$ sí y sólo si $z = 1/(w-1)$ y $w \neq 1$, sigue que las soluciones de $((z+1)/z)^n = 1$ son

$$z_k \;=\; \frac{1}{e^{2\pi k i/n} - 1}\,, \quad \text{donde } k \in \{1, \ldots, n-1\}\,.$$

(iii).- Dado que α es real, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbb{R}e(P(\alpha)) &= 2\alpha^3 - 5\alpha^2 + 1\,, \quad \text{y}\,, \\ \mathbb{I}m(P(\alpha)) &= -6\alpha^2 + 9\alpha - 3\,. \end{aligned}$$

Como $P(\alpha) = 0$, entonces tanto la parte real como la imaginaria de $P(\alpha)$ deben ser iguales a 0, i.e.,

$$\begin{aligned} 0 &= 2\alpha^3 - 5\alpha^2 + 1\,, \quad \text{y}\,, \\ 0 &= -6\alpha^2 + 9\alpha - 3\,. \end{aligned}$$

De la segunda ecuación se obtiene que $2\alpha^2 - 3\alpha + 1 = 0$, i.e., $\alpha = 1$ o $\alpha = 1/2$. Pero, $\alpha = 1$ no es solución de la primera ecuación. Sigue que α debe ser igual a $1/2$.

Aunque no se pedía, las otras raíces de $P(z)$ se obtienen dividiendo $P(z)$ por $z - 1/2$, lo que lleva a concluir que,

$$P(z) \;=\; (z - 1/2)(2z^2 - (4+6i)z - 2 + 6i)\,.$$

Luego, como $(4+6i)^2 - 4 \cdot 2(-2+6i) = -4$, se tiene que las las otras dos raíces de $P(z)$ son $(4 + 6i \pm 2i)/4$, i.e., $1 + 2i$ y $1 + i$.

PROBLEMA 3:

(i).- Claramente, para todo $x \in G$, $f_e(x) = e * x * e^{-1} = e * x * e = x$ puesto que $e^{-1} = e$ y e es el neutro de $(G, *)$, i.e., $f_e = id_G$.

Por otro lado, para todo $x \in G$,

$$f_{a*b}(x) \;=\; (a*b)*x*(a*b)^{-1} \;=\; a*b*x*b^{-1}*a^{-1} \;=\; f_a(b*x*b^{-1}) \;=\; f_a(f_b(x)),$$

i.e., $f_{a*b} = f_a \circ f_b$.

(ii).- Hay que probar que f_a es un homomorfismo y que es biyección.

Veamos primero que es homomorfismo. En efecto, para todo $x, y \in G$, como $a^{-1}*a = e$,

$$f_a(x*y) \;=\; a*x*y*a^{-1} \;=\; (a*x*a^{-1})*(a*y*a^{-1}) \;=\; f_a(x)*f_a(y),$$

i.e., f_a es un homomorfismo.

Veamos que f_a es biyección. Hay dos formas de hacerlo.

- **Primera forma:** Basta mostrar que f_a es invertible. Por (i), $id_G = f_e = f_{a*a^{-1}} = f_a \circ f_{a^{-1}}$. Luego, f_a posee inversa y esta es $f_{a^{-1}}$.
- **Segunda forma:** Basta mostrar que f_a es inyectiva y epiyectiva. Para establecer la inyectividad observar que si $x, y \in G$ son tales que $f_a(x) = f_a(y)$, entonces $a*x*a^{-1} = a*x*a^{-1}$. De lo anterior es fácil deducir que $x = y$, i.e., f_a es inyectiva. Para establecer la epiyectividad basta observar que cualquiera sea $x \in G$, $f_a(a^{-1}*x*a) = a*a^{-1}*x*a*a^{-1} = x$.

  Por otro lado, como $f_a \circ f_{a^{-1}} = f_{a*a^{-1}} = f_e = id_G$, se tiene que $(f_a)^{-1} = f_{a^{-1}}$.

(iii).- Hay dos formas de establecer que $(Z(G), *)$ es subgrupo.

- **Primera Forma:** Para probar que $(Z(G), *)$ es subgrupo basta establecer que para todo $x, y \in Z(G)$, $x*y^{-1} \in Z(G)$. Esto se tiene puesto que si asumimos que $x, y \in Z(G)$, entonces $f_x = f_y = id_G$. Pero, por (ii), $f_{x*y^{-1}} = f_x \circ f_{y^{-1}} = f_x \circ (f_y)^{-1} = id_G \circ (id_G)^{-1} = id_G$, i.e., $x*y^{-1} \in Z(G)$ como se quería establecer.
- **Segunda Forma:** Observar que $Z(G) \subseteq G$. Además, si $a, b \in Z(G)$, entonces $f_{a*b} = f_a \circ f_b = id_G \circ id_G$, i.e.$a*b \in Z(G)$. Luego, $*$ es cerrada en $Z(G)$. La asociatividad de $*$ en $Z(G)$ se hereda de la asociatividad de $*$ en G. Además, como $f_e = id_G$, se tiene que $e \in Z(G)$ es neutro. Finalmente, si $a \in Z(G)$, por (ii), $f_{a^{-1}} = (f_a)^{-1} = id_G \circ id_G^{-1} = id_G$, i.e.$a^{-1} \in Z(G)$. Sigue que $(Z(G), *)$ es grupo.

Finalmente, observar que

$$a \in Z(G) \iff f_a = id_G \iff \forall x \in G\,,\ a*x*a^{-1} = x \iff \forall x \in G\,,\ a*x = x*a\,.$$