Fecha: 8 de agosto del 2002
Tiempo: 3 horas

Pauta Control Recuperativo MA-11A Álgebra

1. (a) Debemos probar que el conjunto $\{h \in H|\ h > 0\}$ tiene algún elemento. Sea $x \in H$ tal que $x \neq 0$ (este x existe pues $H \neq \{0\}$). Si $x > 0$ se tiene que $x \in \{h \in H|\ h > 0\}$. Si $x < 0$ se tiene que, como H es grupo, $-x \in H$. Luego $(-x) \in \{h \in H|\ h > 0\}$.

   `[0/0.5 ptos]`

   (b) Sea $x \in d\mathbb{Z}$. Es decir, $x = dk$ para algún $k \in \mathbb{Z}$. Debemos probar que $x \in H$.

   - Caso 1: $k = 0$.
     Aquí $x = 0$ y, como $(H, +)$ es subgrupo de $(\mathbb{Z}, +)$, el neutro $0 \in H$.

     `[0/0.5 ptos]`

   - Caso 2: $k \geq 1$.
     Aquí $x = \underbrace{d + \cdots + d}_{k}$. Como $d \in H$ y H es cerrado para la operación $+$, se tiene que $x \in H$.

     `[0/0.5 ptos]`

   - Caso 3: $k \leq -1$.
     Aquí $x = \underbrace{(-d) + \cdots (-d)}_{|k|}$. Como $-d \in H$ (H es grupo) y H es cerrado para la operación $+$, se tiene que $x \in H$.

     `[0/0.5 ptos]`

   (c) Sea $h \in H$ con $h > 0$ y consideremos también el elemento $d = \min\{h \in H|\ h > 0\}$. Por el Teorema, existe un único par $q, r \in \mathbb{N}$ tal que $h = qd + r$ y $0 \leq r < d$. Por la parte (b) sabemos que $qd \in H$, y luego $r = h - qd \in H$ (ya que $-qd \in H$, $h \in H$, y la operación es cerrada). Si $r > 0$ habría una contradicción pues existiría un $r \in H$ tal que $0 < r < d$. O sea, $r = 0$ y se concluye que $h = qd$ con $q > 0$.

   `[0/2 ptos]`

   (d) Ya sabemos que $d\mathbb{Z} \subseteq H$. Debemos probar que $H \subseteq d\mathbb{Z}$. Sea $h \in H$. Lo que se debe hacer es escribir h de la forma dk con $k \in \mathbb{Z}$.

   - Caso 1: $h = 0$
     Obviamente, $h = d0$.

- Caso 2: $h > 0$
  Aquí se deduce, por (c), que $h = dq$ con $q > 0$.
- Caso 3: $h < 0$
  Se tiene que $-h > 0$ y luego, por (c), $-h = dq$ con $q > 0$. Se concluye que $h = d(-q)$ con $-q < 0$.

`[0/2 ptos]`

2. (a)
   - Sea $n = 0$. $3^{2\times 0+1} + 2^{0+2} = 3 + 4 = 7$ es divisible por 7.
   - Sea $n \geq 0$. Asumamos que $3^{2n+1} + 2^{n+2} = 7\alpha$. Sigue que:

$$\begin{aligned} 3^{2(n+1)+1} + 2^{(n+1)+2} &= 2 \times [3^{2n+1} + 2^{n+2}] + 7 \times 3^{2n+1} \\ &= 7 \times [2\alpha + 3^{2n+1}] \\ &= 7\beta \end{aligned}$$

de donde se deduce el paso inductivo.

`[0/3 ptos]`

(b) $\Longrightarrow$) Sea $\cos(\theta) + i\sin(\theta)$ una raíz compleja de $p(x)$. Como los coeficientes del polinomio son reales también $\cos(\theta) - i\sin(\theta)$ es raíz. Es decir,

$$\begin{aligned} p(x) &= (x - \cos(\theta) - i\sin(\theta))(x - \cos(\theta) + i\sin(\theta)) \\ &= x^2 + 2\cos(\theta) + \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) \\ &= x^2 + \alpha x + 1 \end{aligned}$$

Como $-1 < \cos(\theta) < 1$, se tiene que $-2 < \alpha = 2\cos(\theta) < 2$.

`[0/1.5 ptos]`

$\Longleftarrow$) Sabemos que las soluciones de la ecuación cuadrática son

$$x_1 = \frac{-\alpha + i\sqrt{4-\alpha^2}}{2} \text{ y } x_2 = \frac{-\alpha - i\sqrt{4-\alpha^2}}{2}$$

Sigue que

$$|x_1|^2 = |x_2|^2 = \frac{\alpha^2 + (4-\alpha^2)}{4} = 1$$

`[0/1.5 ptos]`

3. (a) i. $\sum_{k=1}^{n} \frac{\overline{z}_k}{|z_k|}(z_k - z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{|z_k|^2}{|z_k|} - z\sum_{k=1}^{n} \frac{\overline{z}_k}{|z_k|} = \sum_{k=1}^{n} |z_k|$.

`[0/1.5 ptos]`

ii. $\sum_{k=1}^{n}|z_k| = \sum_{k=1}^{n}\frac{\bar{z}_k}{|z_k|}(z_k - z) \leq \sum_{k=1}^{n}|\frac{\bar{z}_k}{|z_k|}||z_k - z| \leq \sum_{k=1}^{n}|z_k - z|$.

[0/1.5 ptos]

(b) i.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} = \frac{r^{2n+2}-1}{r^2-1} &= \frac{r^{2n+1}-r^{-1}}{r-r^{-1}} \\ &= \frac{r^n(r^{n+1}-r^{-n-1})}{r-r^{-1}} \end{aligned}$$

[0/1.5 ptos]

ii. Vamos a calcular la parte real de $\sum_{k=0}^{n}((e^{i\theta})^2)^k$ de dos maneras distintas.

- $\sum_{k=0}^{n}((e^{i\theta})^2)^k = \sum_{k=0}^{n}(e^{2ki\theta}) = \sum_{k=0}^{n}(\cos(2k\theta) + i\sin(2k\theta))$. La parte real resulta ser $\sum_{k=0}^{n}\cos(2k\theta)$.
-
$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n}((e^{i\theta})^2)^k &= \frac{(e^{i\theta})^n((e^{i\theta})^{n+1}-(e^{i\theta})^{-n-1})}{(e^{i\theta})-(e^{i\theta})^{-1}} \\ &= \frac{e^{in\theta}(e^{i(n+1)\theta}-e^{i(-n-1)\theta})}{e^{i\theta}-e^{i(-\theta)}} \\ &= \frac{(\cos(n\theta)+i\sin(n\theta))(2i\sin((n+1)\theta))}{(2i\sin(\theta))} \end{aligned}$$

  La parte real de la expresión es $\frac{\cos(n\theta)\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}$, con lo que se tiene el resultado.

[0/1.5 ptos]