Pauta Control Recuperativo Algebra
Agosto 1996

P1. (a) i) Recordemos que $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Si $A \triangle B = B$ entonces,

$$\begin{aligned} B \cap (A \setminus B) &= [(A \setminus B) \cup (B \setminus A)] \cap (A \setminus B) \\ \phi &= (A \setminus B) \cup ((B \setminus A) \cap (A \setminus B)) \\ \phi &= (A \setminus B) \cup \phi \\ \Rightarrow A \setminus B &= \phi \end{aligned}$$

Luego $B = A \triangle B = \phi \cup (B \setminus A)$, concluye que $B = B \setminus A$.

(ii) Una implicancia es directa:
($\Leftarrow$) Si $A = \phi$ entonces $A \triangle B = (\phi \cap B^c) \cup (B \cap \phi^c) = \phi \cup B = B$.

($\Rightarrow$) Si $B = A \triangle B$ entonces $A \setminus B = \phi$ por la parte (i) lo que implica que $A \subseteq B$. Entonces $B = (B \setminus A) \cup A$, donde la unión es entre conjuntos disjuntos. Pero también por la parte (i) $B \setminus A = B$, luego $B = B \cup A$ y $B \cap A = \phi$. Concluimos entonces que $B \cap A = \phi = (B \cup A) \cap A = (B \cap A) \cup (A \cap A) = \phi \cup A = A$. Hemos probado que $A = \phi$.

b) i) Sea $n = 1$, luego $n^3 + 5n = 6$ y $6/6$. Es decir, la propiedad es cierta para $n = 1$.
Supongamos que la propiedad es cierta para un cierto $n \in I\!N \setminus \{0\}$, es decir, $6/n^3 + 5n$. Probemos que bajo este supuesto tb. se tiene la propiedad para $n + 1$, es decir, $6/(n+1)^3 + 5(n+1)$.

Desarrollemos la última expresión:

$$\begin{aligned} (n+1)^3 + 5(n+1) &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 5n + 5 \\ &= (n^3 + 5n) + 3n(n + 1 + 6) \end{aligned}$$

Pero $(\frac{n(n+1)}{2})$ es un entero, pues $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ o también pues $n \vee (n+1)$ es par, luego $(n+1)^3 + 5(n+1) = (n^3 + 5n) + 6\frac{n(n+1)}{2} + 6$.
Como $n^3 + 5n = 6 \cdot K$ por hipótesis de inducción se tiene que:

$$(n+1)^3 + 5(n+1) = 6[K + \frac{n(n+1)}{2} + 1] = 6 \cdot \bar{K} \text{ con } \bar{K} \in I\!N.$$

y $6/(n+1)^3 + 5(n+1)$.

ii) Sea $n = 1$, luego $\sum_{i=1}^{1} \frac{1}{i^2} = 1$ y $2 - \frac{1}{1} = 1$, es decir $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} = 2 - \frac{1}{n}$ para $n = 1$, probando la propiedad.

Supongamos que para $n \in I\!N \setminus \{0\}$, la propiedad es cierta es decir $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$, y probemos que sigue siéndolo en $n+1$.

Para ello desarrollamos,

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Pero,

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{n^2+2n+1-n}{n(n+1)^2} = \frac{n^2+n+1}{(n^2+n)(n+1)} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n^2+n)(n+1)}$$

Luego

$$\sum_{i=1}^{n+!} \frac{1}{i^2} \leq 2 - \frac{1}{n+1} - \underbrace{\frac{1}{(n^2+n)(n+1)}}_{\leq 0} \leq 2 - \frac{1}{n+1}$$

[0.8]

P2. (a) i) Reflexividad: Sea $x \in I\!R$, entonces $x^2 + x = x^2 + x$ y $\mathcal{R}$ es reflexiva.

Simetría: Sean $x, y \in I\!R$ tales que $x\mathcal{R}y$, entonces $x^2 + y = y^2 + x$, pero la igualdad en $I\!R$ es simétrica luego $y^2 + x = x^2 + y$ que equivale a decir $y\mathcal{R}x$. Hemos probado que $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$.

Transitividad: Sean $x, y, z \in I\!R$ tales que $x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z$, es decir por definición se tiene que:

$$x^2 + y = y^2 + x \wedge y^2 + z = z^2 + y \Rightarrow x^2 - x = y^2 = y \wedge y^2 - y = z^2 - z$$

entonces usando la transitividad de la igualdad se obtiene

$$x^2 - x = z^2 - z \Leftrightarrow x^2 + z = z^2 + x \Leftrightarrow x\mathcal{R}z.$$

Esto prueba que $\mathcal{R}$ es transitiva.
(ii) La clase de $a \in I\!R$ es $[a]_{\mathcal{R}} = \{x \in I\!R / x\mathcal{R}a\} = \{x \in I\!R / x^2 + a = a^2 + x\}$.
Es decir hay que resolver la ecuación,

$$\begin{aligned} x^2 - x + a(1-a) &= 0 \\ (x-a)(x-(1-a)) &= 0 \\ \Rightarrow x = a \vee x &= 1-a \end{aligned}$$

$\Rightarrow [a]_{\mathcal{R}} = \{a, 1-a\}$.

(b) (i) Inyectividad: Sean $x, y \in I\!R$ tales que $f(x) = f(y)$, luego

$$f \circ f(x) = f \circ f(y) \Leftrightarrow x + 1 = y + 1 \Leftrightarrow x = y$$

Es decir f es inyectiva.

Subreyectiva: Si $f(I\!R) \neq I\!R$ entonces $f(f(I\!R)) \neq I\!R$ pues $f(I\!R) \subseteq I\!R$. Pero $f \circ f(I\!R) = I\!R$, lo que es una contradicción y f es sobreyectiva.

(ii) Si f es un homomorfismo entonces se tiene que $f(0) = 0$ que es el neutro para la suma. Pero si esto es cierto entonces $f \circ f(0) = f(0) = 0$. Pero $f \circ f(0) = 0 + 1 = 1$, lo que produce una contradicción.

Luego f no puede ser un homomorfismo de $(I\!R, +)$ en $(I\!R, +)$.

P3. Sean $a, b \in G$ debemos probar que $a * b = b * a$. Si usamos la propiedad del grupo, se tendrá que:

$$(a * b) * (a * b) = (a * a) * (b * b)$$

Pero en el grupo la operación es asociativa, así que la igualdad se puede escribir como:

$$a * [(b * a) * b] = a * [(a * b) * b]$$

como en un grupo todo elemento es cancelable se obtiene.

$$(b * a) * b = (a * b) * b$$

nuevamente usando la cancelabilidad de los elementos se obtiene.

$$b * a = a * b$$

(b) Para probar que $(\bar{G}, *)$ es un subgrupo de $(G, *)$ basta probar que $\forall f, g \in \bar{G}$ se tiene que $f \circ g^{-1} \in \bar{G}$.

Busquemos g^{-1}. Si $g(x) = x + b$ entonces $g^{-1}(x) = x - b$. Luego para $f \in \bar{G}$ con $f = x + a$ se tendrá que

$$f \circ g^{-1}(x) = f(g^{-1}(x)) = f(x - b) = x - b + a$$

Es decir $f \circ g^{-1} \in \bar{G}$ pues $-b + a \in I\!R$.