PAUTA CONTROL RECUPERATIVO 1 - MA11A-ALGEBRA

(1998)

Pregunta 1.

(i) Es claro que * es ley de composición interna pues si a, c son $\neq 0$ entonces a $\cdot$ c $\neq 0$ y todos los elementos de (a, b) * (c, d) son reales.

(i.1) <u>Asoc</u>.

((a, b) * (c, d)) * (e, f) =

$$= (a \cdot c,\ a \cdot d + \tfrac{b}{c}) * (e, f) = (a \cdot c \cdot e,\ a \cdot c \cdot f + \tfrac{a \cdot d + \frac{b}{c}}{e}) = (1)$$

$$y\ (a,b) * ((c,d) * (e,f)) = (a,b) * \left((c \cdot e)\ , c \cdot f + \frac{d}{e}\right)$$

$$= (a \cdot c \cdot e, a \cdot c \cdot f + a \cdot \frac{d}{e} + \frac{b}{c \cdot e}) = (2)$$

claramente (1) = (2)

(i.2) <u>Neutro</u>: Busco $(x,y) \in H$ tal que $(a,b) * (x,y) = (x,y) * (a,b) = (a,b)$ (a, b) $*$ $(x,y) = (a \cdot x, a \cdot y + \frac{b}{x}) = (a,b)$

$$\Rightarrow a \cdot x = a \Rightarrow x = 1 \quad pues\ a \neq 0$$

$$a \cdot y + \frac{b}{x} = b \Rightarrow a \cdot y = 0 \Rightarrow y = 0$$

$\Rightarrow \quad (x,y) = (1,0) \quad y \quad (a,b) * (1,0) = (a,b).$

Al revés: $(1,0) * (a,b) = (a, b + \frac{0}{a}) = (a,b)$

$\Rightarrow$ e = (1,0) es <u>*neutro*</u> y está en H.

(i.3) <u>*Inversos*</u>: dado (a, b) $\in$ H debo encontrar (x, y) $\in$ H tal que (a, b) * (x, y) = (x, y) * (a, b) = (1,0):

$$(a,b) * (x,y) = \left(a \cdot x, ay + \frac{b}{x}\right) = (1,0)$$

$$\Rightarrow \ a \ \cdot \ x \ = 1 \ \Rightarrow \ x \ = \frac{1}{a}$$

$$a \cdot y + \frac{b}{x} = 0 \Rightarrow ay + ab = 0 \Rightarrow \ y \ = \ -b$$

$$\Rightarrow (x, y) = (\frac{1}{a}, -b) \ y \frac{1}{a} \neq 0 \Rightarrow (\frac{1}{a}, -b) \in \ H.$$

Se tiene que,

$$(a, b) * (\frac{1}{a}, -b) = (1, 0)$$

$$y \ \ (\frac{1}{a}, -b) * (a, b) = \left(1, \frac{1}{a} \cdot b + \frac{(-b)}{a}\right)$$

$$= (1, \frac{b}{a} - \frac{b}{a}) = (1, 0)$$

$\Rightarrow \quad (a, b^{-1}) = (\frac{1}{a}, -b)$

Luego (H, *) es grupo.

Veamos si es conmutativo:

$$(a, b) * (c, d) = (a \cdot c, a \cdot d + \frac{b}{c})$$

$$(c, d) * (a, b) = (a \cdot c, c \cdot b + \frac{d}{a})$$

Para que sea conmutativo se debe tener,

$$a \cdot d + \frac{b}{c} = b \cdot c + \frac{d}{a}$$

Si tenemos a = 1, d =1   b = c = 2

$$\Rightarrow a \cdot d + \frac{b}{c} = 1 + 1 = 2$$

$$b \cdot c + \frac{d}{a} = 4 + 1 = 5$$

Luego no es Abeliano

(ii) Probemos la indicación:

Si $f^n\ (g)\ \in\ G'$, como $f\ (G')\ \subseteq\ G'$ entonces
$f\ (f^n\ (g))\ \in\ G'$, o equivalentemente $f^{n+1}\ (g)\ \in\ G'$.

Por inducción partiendo de n se tendrá que $\forall\ m \geq\ n, f^m\ (g)\ \in\ G'$

Probemos que V es subgrupo:

Sean g, h $\in$ V. Luego existen n, m $\in \mathbb{N}$ tales que $f^n\ (g)\ \in\ G'\ y\ f^m\ (h)\ \in\ G'$.
De la indicación se tiene que si $\tilde{n} =\ max\ \{n,m\}\ entonces\ f^{\tilde{n}}\ (g)\ \in\ G'\ y\ f^{\tilde{n}}\ (h)$
$\in\ G'$.

$$\begin{aligned} Entonces\ f^{\tilde{n}}\ (g * h^{-1}) &= f^{\tilde{n}}\ (g)\ *\ f^{\tilde{n}}\ (h^{-1}) \\ &= f^{\tilde{n}}\ (g)\ *\ (f^{\tilde{n}}\ (h))^{-1} \end{aligned}$$

$Como\ f^{\tilde{n}}\ (g)\ \in\ G'\ , f^{\tilde{n}}\ (h)\ \in\ G'\ y\ G'$ es subgrupo

entonces $f^{\tilde{n}}\ (g)\ *\ (f^{\tilde{n}}\ (h))^{-1}\ \in\ G'$. Concluimos que $g\ *\ h^{-1}\ \in\ V$.
Esto prueba que V es subgrupo.

Pregunta 2.

(i) *Dado* $q \in \mathbb{Q}$ se tiene que $Z^2 = q$ tiene 2 soluciones.

Luego $f^{-1}(\mathbb{Q}) = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} f^{-1}(\{q\})$ es una reunión numerable (pues $\mathbb{Q}$ es numerable) de conjuntos finitos. Luego es numerable.

(ii) $\underline{n = 0}$: $\frac{f_1}{f_0} = \frac{2}{1} = 2$

$\underline{H.I}$: $$\frac{f_{n+1}}{f_n} = 2 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{2+1}}$$

$$\ddots$$

$$2 + \frac{1}{2}(\text{n - veces})$$

$\underline{n \to n+1}$:

$$\begin{aligned} \frac{f_{n+2}}{f_{n+1}} = \frac{2f_{n+1} + f_n}{f_{n+1}} &= 2 + \frac{f_n}{f_{n+1}} \\ &= 2 + \frac{1}{(\frac{f_{n+1}}{f_n})} \\ &= 2 + \frac{1}{(\frac{f_{n+1}}{f_n})} \ ((\text{n} + 1) \ \text{-} \ \text{veces}) \end{aligned}$$

(iii) Se tiene que,

$$\cdot \sum_{\sqcup=0}^{2n} \binom{2n}{j} = 2^{2n} \quad (B.Newton)$$

$$\cdot \sum_{j=0}^{2n} \binom{2n}{j} (-1)^j = (1-1)^{2n} = 0 \quad (B.Newton)$$

Sumando,

$$\sum_{j=0}^{2n} \binom{2n}{j} + \sum_{j=0}^{2n} \binom{2n}{j} \; (-1)^j = \sum_{j=0}^{2n} \binom{2n}{j} \underbrace{(1+(-1)^j)}_{\left\{\substack{0 \text{ si } j \text{ impar} \\ 2 \text{ si } j \text{ par}}\right.} = 2^{2n}$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \binom{2n}{2j} 2 = 2^{2n}$$

$$\Rightarrow \sum_{j=0}^{n} \binom{2n}{2j} = 2^{2n-1}$$

Pregunta 3.

(i) - f es sobreyectiva pues dado$(a + b\sqrt{5}) \in K$ se tiene que $f(a - b\sqrt{5}) = a + b\sqrt{5}$ y es inyectiva pues si

$$f(a_1 + b_1\sqrt{5}) = f(a_2 + b_2\sqrt{5}) \text{ entonces}$$

$$(a_1 - a_2) = (b_1 - b_2)\sqrt{5} \;\; con \; (a_1 - a_2) \in Q \text{ y}(b_1 - b_2) \in Q.$$

$Si(b_1 - b_2) \neq 0$ entonces $\sqrt{5}$ está en$Q$ que no puede ser, luego $b_1 - b_2 = 0$ y $a_1 - a_2 = 0$

Veamos que

$$f((a + b\sqrt{5}) + (\overline{a} + \overline{b}\sqrt{5})) = f(a + b\sqrt{5}) + f(\overline{a} + \overline{b}\sqrt{5})$$

En efecto, $$\begin{aligned} f((a + b\sqrt{5}) + (\overline{a} + \overline{b}\sqrt{5})) &= f((a+\overline{a}) + (b+\overline{b})\sqrt{5}) \\ &= (a + \overline{a}) - (b + \overline{b})\sqrt{5} \\ &= (a - b\sqrt{5}) + (\overline{a} - \overline{b}\sqrt{5}) \\ &= f(a + b\sqrt{5}) + f(\overline{a} + \overline{b}\sqrt{5}) \end{aligned}$$

Veamos la misma propiedad con el producto,

$$\begin{aligned} f((a + b\sqrt{5}) \cdot (\overline{a} + \overline{b}\sqrt{5})) &= f(a\,\overline{a} + 5b\,\overline{b} + (\overline{a}b + a\,\overline{b})\sqrt{5}) \\ &= (a\,\overline{a} + 5b\,\overline{b}) - (\overline{a}\,b + a\,\overline{b})\sqrt{5} \\ &= a\,\overline{a} + 5b\,\overline{b} - \overline{a}\,b\sqrt{5} - a\,\overline{b}\sqrt{5} \\ &= (a - b\sqrt{5}) \cdot (\overline{a} - \overline{b}\sqrt{5}) \\ &= f(a + b\sqrt{5}) \cdot f(\overline{a} + \overline{b}\sqrt{5}) \end{aligned}$$

(ii)

$$
\begin{aligned}
p\,(x_0) \;=\; \sum_{i=0}^{n} a_i\, x_0^i \;\Rightarrow\; f\,(p\,(x_0)) &= f\,(\sum_{i=0}^{n} a_i\, x_0^i) \\
&= \sum_{i=0}^{n} f\,(a_i x_0^i) \\
&= \sum_{i=0}^{n} f\,(a_i)\,\cdot\, f\,(x_0^i) \\
&= \sum_{i=0}^{n} f\,(a_i)\,\cdot\,(f(x_0))^i \\
\text{pero } a_i \in \mathbb{Q} \text{ luego } f\,(a_i) = a_i \;\Rightarrow &= \sum_{i=0}^{n} a_i\,\cdot\,(f(x_0))^i \\
&= p\,(f(x_0))
\end{aligned}
$$

(iii) $x_0 = a + b\sqrt{5}$ es raíz de $p(x)$ luego,

$p\,(x_0) = 0$. Usando (ii) tenemos que,

$$
\begin{aligned}
f(p(x_0)) = f(0) = 0 &= p\,(f\,(x_0)) \\
0 &= p\,(a - b\sqrt{5})
\end{aligned}
$$

Luego $a - b\sqrt{5}$ es raíz.

(iv)

$$
\begin{aligned}
p\,(x) &= a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + a_3\,x^3 \\
&= \lambda\,(x - (2 + \sqrt{5}))\,(x - (2 - \sqrt{5}))\,(x - x_3)
\end{aligned}
$$

(descomposición en $\mathbb{C}$) usamos que $(2 + \sqrt{5})$ y $(2 - \sqrt{5})$ son raíces.

$$
\begin{aligned}
\text{Luego, } p\,(x) &= \lambda\,(x^2 - 4x - 1)\,(x - x_3) \\
&= \lambda\,(x^3 - (x_3 + 4)\,x^2 + x_3)
\end{aligned}
$$

Como $a_0,\, a_1,\, a_2,\, a_3 \in \mathbb{Q}$ se tiene que $\lambda \in \mathbb{Q}$
y $\lambda\, x_3 \in \mathbb{Q}$ luego $x_3 \in \mathbb{Q}$.