Pauta Control Recuperativo MA11A Algebra

Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile.

Año 2004

El objetivo de esta pauta es orientar la corrección de los ayudantes y dar al alumno una guía de estudio. Una copia se puede obtener vía `http://www.dim.uchile.cl/~lmella/MA11A.html` en formato ps o pdf.

Pauta Control Recuperativo
Algebra MA11A

Problema 1

(i) Demuestre sin usar inducción que $\forall n \in I\!N$, $\forall x \in I\!R$

$$\binom{n}{1}x(1-x)^{n-1} + 2\binom{n}{2}x^2(1-x)^{n-2} + ... + k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} + ... + n\binom{n}{n}x^n = nx$$

<u>SOLUCIÓN</u>

El primer miembro se escribe como $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$

Entonces, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k\frac{n!}{k!(n-k)!}x^k(1-x)^{n-k}$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}x^k(1-x)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}x^k(1-x)^{n-k}$$

y por el cambio de índices:

$$= n\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1}x^k(1-x)^{n-k} = n\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k}x^{k+1}(1-x)^{n-(k+1)}$$

binomio $\displaystyle = nx\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k}x^k(1-x)^{n-1-k} = nx(x+1-x)^{n-1} = nx$

(2.5 ptos)

(ii) Demuestre usando inducción que:

$2 \cdot 7^n + 3 \cdot 5^n - 5$ es divisible por 24 $\forall n \in I\!N$

Indicación: Puede usar, donde corresponda, que la suma de dos enteros impares, es par.

SOLUCIÓN

Para $n = 0$ es $2 \cdot 7^0 + 3 \cdot 5^0 - 5 = 2 + 3 - 5 = 0$ que es divisible por 24.

Sea $2 \cdot 7^n + 3 \cdot 5^n - 5$ dividible por 24, algún $n \in I\!N$. Esto es $2 \cdot 7^n + 3 \cdot 5^n - 5 = 24k$, $k \in I\!N$

Por demostrar que $2 \cdot 7^{n+1} + 3 \cdot 5^{n+1} - 5$ es divisible por 24.

En efecto, $2 \cdot 7^{n+1} + 3 \cdot 5^{n+1} - 5 = 2 \cdot 7 \cdot 7^n + 3 \cdot 5 \cdot 5^n - 5$
$= 14 \cdot 7^n + 15 \cdot 5^n - 5 = 2 \cdot 7^n + 3 \cdot 5^n - 5 + 12 \cdot 7^n + 12 \cdot 5^n$

y usando la hipótesis:

$= 2 \cdot 7^n + 3 \cdot 5^n - 5 + 12(7^n + 5^n) = 24k + 12(7^n + 5^n)$

Pero $7^n + 5^n$ es suma de enteros impares y por lo tanto es par (Indicación), es decir, $7^n + 5^n = k'$, $k' \in I\!N$

Entonces, $2 \cdot 7^{n+1} + 3 \cdot 5^{n+1} - 5 = 24k + 24k' = 24(k + k')$

Se concluye que $2 \cdot 7^{n+1} + 3 \cdot 5^{n+1} - 5$ es divisible por 24.

(2.5 ptos)

(iii) (1.0 ptos.) Pruebe que $\sum_{k=1}^{n-1} x^k = \frac{x - x^n}{1 - x}$, $\forall n \geq 2$, $x \neq 1$

SOLUCIÓN

Se trata de términos en progresión geométrica, de modo que la espresión puede deducirse o demostrarla por inducción. Veamos por inducción sobre n:

Para $n = 2$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} x^k = x$ y $\frac{x - x^2}{1 - x} = \frac{x(1-x)}{1-x} = x$. Se cumple.

Sea $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} x^k = \frac{x - x^n}{1 - x}$, algún $n \geq 2$

Por demostrar que, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x^k = \frac{x - x^{n+1}}{1 - x}$

En efecto, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x^k = \sum_{k=1}^{n-1} x^k + x^n = \frac{x - x^n}{1 - x} + x^n$

uso de la hipótesis:

$= \frac{x-x^n+x^n-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$

(1.0 ptos.)

Problema 2

Sean $(A,+,\cdot)$ y $(A^{'},\oplus,\odot)$ dos anillos con neutros aditivos 0 y $0'$ respectivamente y $f: A \longrightarrow A'$ un homomorfismo de anillos.

(a) Se define $I = \{\ x \in A / f(x) = 0'\}$

- **(a.1)** (2.0 ptos.) Demuestre que $(I,+)$ es subgrupo de $(A,+)$
- **(a.2)** (1.0 ptos.) Demuestre que $(\forall a \in A)\ (\forall b \in I), \quad a \cdot b \in I \quad \wedge \quad b \cdot a \in I$
- **(a.3)** (2.0 ptos.) Si $(A,+,\cdot)$ tiene unidad u (neutro para $\cdot$) y $\exists x \in I$ tal que x es invertible, pruebe que $f(u) = 0'$ y utilícelo para demostrar que $(\forall a \in A)\ a \in I$, es decir $A = I$

(b) (1.0 ptos.) Si $(A,+,\cdot)$ y $(A^{'},\oplus,\odot)$ son anillos unitarios, con neutros multiplicativos u y u' respectivamente y $\exists x \in A$ tal que $f(x)$ es invertible en A', pruebe que $f(u) = u'$.

<u>SOLUCIÓN</u>

(a.1) Se sabe que $f(0) = 0'$ con lo cual $0 \in I$ y por lo tanto $I \neq \phi$. Puede utilizarse alguna de las formas compactas, por ejemplo, demostrar que:

$(1) \forall x_1, x_2 \in I \Rightarrow x_1 + x_2 \in I$ y

$(2) \forall x \in I \Rightarrow -x \in I$

En efecto:

(1) Sean $x_1, x_2 \in I$, entonces $f(x_1) = 0' \wedge f(x_2) = 0'$

Por el morfismo $f(x_1 + x_2) = f(x_1) \oplus f(x_2) = 0' + 0 = 0'$

entoncesm $x_1 + x_2 \in I$ (1.0 ptos)

(2) Sea $x \in I$ entonces, $\exists -x \in A$ tal que $x + (-x) = 0$

Por el morfismo $f(x) \oplus f(-x) = f(x + (-x)) = f(0) = 0'$

es decir, $0' \oplus f(-x) = 0'$, es decir, $f(-x) = 0'$ entonces, $(-x) \in I$, (1.0 ptos)

(a.2) Sean $a \in A$ y $b \in I$, con esto, $f(b) = 0'$

Entonces, $f(a \cdot b) = f(a) \odot f(b) = f(a) \odot 0' = 0'$

(morfismo y propiedad en anillos)

Así, $a \cdot b \in I$ y análogamente $b \cdot a \in I$ (1.0 ptos)

(a.3) Sea $x \in I$, x invertible, esto es, $\exists x^{-1} \in A$ tal que $x \cdot x^{-1} = u$ y por el morfismo,
$f(x \cdot x^{-1}) = f(x) \odot f(x^{-1}) = f(u)$ pero,
$x \in I \rightarrow f(x) = 0'$, entonces $f(u) = 0' \odot f(x^{-1}) = 0'$
por propiedad en anillos $(a \cdot 0' = 0' \cdot a = 0')$

Entonces, $f(u) = 0'$ (1.0 ptos)

Sabemos que $I \subseteq A$. Probaremos que $A \subseteq I$

Sea $a \in A$, entonces $a \cdot u = a$ y por el morfismo:

$f(a \cdot u) = f(a) \Rightarrow f(a) \odot f(u) = f(a) \Rightarrow f(a) \cdot 0' = 0' = f(a) \Rightarrow a \in I$

entonces $A \subseteq I$ de donde $A = I$ (1.0 ptos)

(b) Sea $x \in A$, con imagen $f(x)$ invertible en A'

Sabemos que $x \cdot u = u \cdot x = x$ en que u es unidad en A

Por el morfismo $f(x) \odot f(u) = f(u) \odot f(x) = f(x)$

pero $\exists f^{-1}(x) \in A'$ tal que $f^{-1}(x) \odot f(x) = f(x) \odot f^{-1}(x) = u'$

(u neutro para $\odot$ en A')

Entonces, $f(x)$ es cancelable en A', o bien, operando

$(f(u) \odot f(x)) \odot f^{-1}(x) = f(x) \odot f^{-1}(x) \Rightarrow f(u) \oplus u' = u' \Rightarrow f(u) = u'$ (1.0 ptos)

Problema 2

(i) (2.0 ptos.) Resuelva la ecuación

$$1 + 2z + 2z^2 + ... + 2z^{n-1} + z^n = 0$$

Indicación: Utilice, adecuadamente, la parte (iii) del problema 1.

(ii) (2.0 ptos.) Determinar los complejos a, b, c tales que el polinomio $P(x) = x^5 + ax^2 + b$ sea divisible por el polinomio $Q(x) = x^3 + x^2 + cx + 1$

(iii) (2.0 ptos.) Determine todas las raices del polinomio $F(x) = x^5 - 2x^4 - x + 2$ y factorícelo en $\mathbb{C}$ y en $\mathbb{R}$.

SOLUCIÓN

(i) La ecuación puede escrbirse como:

$1 + 2(z + z^2 + \ldots + z^{n-1}) + z^n = 0$ y usando la indicación

$$1 + 2\sum_{k=1}^{n-1} z^k + z^n = 0 \Rightarrow 1 + 2\frac{z - z^n}{1 - z} + z^n = 0,\ z \neq 1$$

Sumando: $\frac{1-z+2z-2z^n+z^n-z^{n+1}}{1-z} = 0$

esto es: $\frac{1+z-z^n-z^{n+1}}{1-z} = 0$ o bien, $\frac{1+z-z^n(1+z)}{1-z} = 0$

factorizando, $\frac{(1+z)(1-z^n)}{1-z} = 0$ (1.0 ptos)

de donde: $1 + z = 0 \Rightarrow z = -1 \wedge 1 - z^n = 0 \Rightarrow z^n = 1$

son las raíces enésimas de la unidad, distintas de $z = 1$.

Las soluciones son: $z = -1$ y $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$

que dan el total de las n raíces de la ecuación. (1.0 ptos).

(ii) Debe efectuarse la división y exigir que el resto sea nulo.

Entonces,

$(x^5 + ax^2 + b) : (x^3 + x^2 + cx + 1) = x^2 - x + 1 - c$

$\underline{x^5 + x^4 + cx^3 + x^2}$

$-x^4 - cx^3 + (a-1)x^2 + b$

$\underline{-x^4 - x^3 - cx^2 - x}$

$(1-c)x^3 + (a+c-1)x^2 + x + b$

$\underline{(1-c)x^3 + (1-c)x^2 + c(1-c)x + 1 - c}$

$(a + 2c - 2)x^2 + [1 - c(1-c)]x + b + c - 1$ (1.0 ptos)

El resto nulo, entonces,

$a + 2c - 2 = 0$

$1 - c(1 - c) = 0$

$b + c - 1 = 0$

$\Rightarrow$

$a + 2c = 2$ (1)

$c^2 - c + 1 = 0$ (2)

$b + c = 1$ (3)

Entonces,

en (2): $c = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$

en (1): $a = 2(1 - c) = 2(\frac{1}{2} \mp i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 1 \mp i\sqrt{3}$

en (3): $b = 1 - c = \frac{1}{2} \mp i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Los complejos son: $a = 1 - i\sqrt{3}$, $b = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $c = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

y también $a = 1 + i\sqrt{3}$, $b = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $c = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ (1.0 ptos)

(ii) Primera forma:

Puede factorizarse directamente:

$F(x) = x^5 - 2x^4 - x + 2 = x^4(x - 2) - (x - 2) = (x - 2)(x^4 - 1)$

$= (x - 2)(x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x - 2)(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$

De aquí se detectan las 5 soluciones que son $-1, 1, 2, i, -i$; y las correspondientes factorizaciones: $(x-2)(x-1)(x+1)(x^2+1)$ en $\mathbb{R}$ y $(x-2)(x-1)(x+1)(x-i)(x+i)$ en $\mathbb{C}$ (2.0 ptos)

Segunda forma:

A falta de otro antecedente, la inspección más útil es suponer la existencia de raíces enteras, que deben ser divisores de 2.

Es directo verificar que $1, -1$ y 2 son raíces.

Entonces, $F(x)$ debe ser divisible por $(x - 1)(x + 1)(x - 2) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

Al efectuar la división:

$(x^5 - 2x^4 - x + 2) : (x^3 - 2x^2 - x + 2) = x^2 + 1$

$\underline{x^5 - 2x^4 - x^3 + 2x^2}$

$x^3 - 2x^2 - x + 2$

$\underline{x^3 - 2x^4 - x + 2}$

0 (2.0 ptos)

Las raíces restantes, deben ser solución de $x^2 + 1 = 0$, es decir, i y $-i$. Siguen las factorizaciones pedidas.