Pauta Control Recuperativo MA11A Algebra
Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile
Semestre 2005-1

El objetivo de esta pauta es orientar la corrección de los ayudantes y dar al alumno una guía de estudio. Es responsabilidad del alumno tener una copia de esta pauta para el día de la revisión de su prueba. Esta se puede obtener en la página:
http://www.dim.uchile.cl/~lmella/MA12A.html en formato ps o pdf.

Problema 1.

a) Las siguientes tablas incompletas corresponden a las operaciones en el anillo $(A, \oplus, \odot)$ para $A = \{a, b, c, d\}$

$\oplus$	a	b	c	d
a	a	b		d
b		a		
c			a	
d				

$\odot$	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a			a
c	a		c	
d	a	b	c	

i) Considerando las propiedades generales del anillo, complete las tablas anteriores justificando cada relleno (Ind.: complete primero la tabla para $\oplus$ y para $\odot$ utilice adecuadamente la distributividad).
Para la tabla aditiva es básico recordar que $(A, \oplus)$ es grupo abeliano (conmutativo), de modo que

$$b \oplus a = a \oplus b = b \quad \text{y} \quad d \oplus a = a \oplus d = d$$

Para la primera fila y columna, solo falta rellenar $a \oplus c = c \oplus a$ y como los elementos del grupo son regulares para $\oplus$, en cada fila y columna no existen elementos repetidos.
Así: $a \oplus c = c \oplus a = c$

La tabla queda

$\oplus$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a		
c	c		a	
d	d			

De aquí: $c \oplus b$ no puede ser ni b ni a por la columna;
ni c, por la fila.
Necesariamente $c \oplus b = b \oplus c = d$
El resto de la tabla se completa, por la regularidad, agregando en cada fila y columna incompleta, el cuarto elemento ausente, distinto de los otros tres.

La tabla queda

$\oplus$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

(1.0 ptos.)

a es el cero del anillo, lo que explica los valores de la primera fila y columna de la tabla multiplicativa.
Para completar esta tabla, puede procederse como sigue:
Ya se tiene que $d = b \oplus c$ de la tabla aditiva.
Entonces $d \odot d = d \odot (b \oplus c) = d \odot b \oplus d \odot c$ por distribución.
Pero $d \odot b = b \;\wedge\; d \odot c = c$ son datos de la tabla $\odot$.
Así $d \odot d = b \oplus c = d$.
También $c \odot d = (d \oplus b) \odot d = d \odot d \oplus b \odot d = d \oplus a = d$ en donde se ha recurrido a productos ya conocidos y a la tabla aditiva.
También $b \odot c = (d \oplus c) \odot c = d \odot c \oplus c \odot c = c \oplus c = a$.
Además $c \odot b = c \odot (c \oplus d) = c \odot c \oplus c \odot d = c \oplus d = b$.
Finalmente $b \odot b = b \odot (d \oplus c) = b \odot d \oplus b \odot c = a \oplus a = a$.

De modo que la tabla para $\odot$ queda

$\odot$	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	a	a	a
c	a	b	c	d
d	a	b	c	d

Obs.: Hay otras formas o secuencias de llenado

(2.0 ptos.)

ii) ¿Es $(A, \oplus, \odot)$ conmutativo?. ¿Posee $(A, \oplus, \odot)$ unidad. ¿Tiene divisores del cero?.

- Es inmediato de la tabla que la ley $\odot$ no es conmutativa, por ejemplo $d \odot b = b \neq a = b \odot d$.
- Claramente no posee unidad, que en caso de existir, debe ser único y conmutar (Obs.: c o d no son unidades).
- El único divisor del cero es $b : b \odot b = a \;\wedge\; b \neq a$. **(1.0 pto.)**

b) $(A, +, \cdot)$ es una anillo tal que $x \cdot x = x \quad \forall x \in A$. Demuestre que:

i) $x = -x \quad \forall x \in A$ ($-x$ es inverso aditivo de x).

ii) $(A, +, \cdot)$ es anillo conmutativo.

iii) $(x \cdot y) \cdot (x + y) = 0 \quad \forall x, y \in A$.

i) Aprovechando la propiedad puede ponerse $(x + x) \cdot (x + x) = x + x$ y distribuyendo $x \cdot x + x \cdot x + x \cdot x + x \cdot x = x + x \Rightarrow x + x + x + x = x + x$ y cancelando por la regularidad en el grupo aditivo queda $x + x = 0$ entonces $x = op(x) = -x$ **(0.7 ptos.)**

ii) Igual al caso anterior $(x + y) \cdot (x + y) = x + y \Rightarrow x \cdot x + x \cdot y + y \cdot x + y \cdot y = x + y$ $\Rightarrow x + x \cdot y + y \cdot x + y = x + y \Rightarrow$ cancelando $x \cdot y + y \cdot x = 0$ de donde $xy = -yx$ pero por (i) $-yx = yx$, es decir $xy = yx \quad \forall x, y \in A$. Conmut. **(0.7 ptos.)**

iii) $x \cdot y \cdot (x + y) = x \cdot (yx) + x(yy) = x \cdot x \cdot y + x \cdot y \cdot y = x \cdot y + xy = 0$ donde se usó, distrib., conmut. (ii) e (i). **(0.6 ptos.)**

Problema 2

a) i) Pruebe que $w_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}, k = 1, 2, \ldots, n-1$, son raices del polinomio $P(z) = 1 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1}$.

En efecto, $P(z) = 1 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} z^k = \frac{1-z^n}{1-z}$.

De modo que las raices de $P(z)$ satisfacen $1 - z^n = 0 \ \wedge \ z \neq 1$.

Así, las raices de $P(z)$ son las raices de la unidad distintas de 1.

Es decir $w_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}, k = 1, 2, \ldots, n-1$, son raices de $P(z)$. **(1.5 ptos.)**

ii) Deduzca que $P(z) = (z - w_1)(z - w_2)\ldots(z - w_{n-1})$.

Es inmediato que conocidas las raices del Polinomio mónico $P(z)$, este puede factorizarse, en forma única como.

$P(z) = (z - w_1)(z - w_2)\ldots(z - w_{n-1})$ en que $w_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}, k = 1, 2, \ldots, n-1$.**(0.5 ptos.)**

iii) Claramente, los vértices $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ del polígono regular inscrito en el cículo unitario representan los complejos que son raices ene-esimas de la unidad, distintas de 1 ($w_0 = 1$ es el complejo $A(1,0)$). Así, los segmentos $\overline{AA}_1, \overline{AA}_2, \ldots, \overline{AA}_{n-1}$

estarán representados, de acuerdo a la indicación (dist. $(z,w) = |z - w|$) por:

$\overline{AA}_1 = |1 - w_1|; \overline{AA}_2 = |1 - w_2|; \ldots, \overline{AA}_{n-1} = |1 - w_{n-1}|$

Utilizando (ii) se sabe que $|P(z)| = |z - w_1||z - w_2|\ldots|z - w_{n-1}|$ por propiedad del modulo.

Bastará en esta expresión, hacer $z = 1$ para concluir que:

$P(1)| = |1 - w_1||1 - w_2|\ldots|1 - w_{n-1}|$, Pero $|P(1)| = |\overbrace{1 + 1 + \ldots 1}^{n \text{ veces}}| = n$.

Así $|1 - w_1||1 - w_2|\ldots|1 - w_{n-1}| = n$, es decir, $\overline{AA}_1, \cdot\overline{AA}_2 \ldots \cdot \overline{AA}_{n-1} = n$ **(2.0 ptos.)**

b) Sea $A = \{z \in \mathbb{C}/|z| = c, c \text{ fijo}, c \in \mathbb{R}^+\}$.
Sean $f, g : A \to A$ definidas por $f(z) = \bar{z}; g(z) = iz$.
Calcule

i) $(g \circ f)(z) + (f \circ g)(z)$

ii) $|(g \circ f)(z)| + |(f \circ g)(z)|$

i) $(g \circ f)(z) = g(f(z)) = g(\bar{z}) = i\bar{z}$

$(f \circ g)(z) = f(g(z)) = f(iz) = \overline{iz} = \bar{i} \cdot \bar{z} = -i\bar{z}$ (Propiedad del conjug.)

Así $(g \circ f)(z) + (f \circ g)(z) = i\bar{z} - i\bar{z} = 0$ **(1.0 pto.)**

ii) $|(g \circ f)(z)| = |i\bar{z}| = |i||\bar{z}| = 1 \cdot c = c$ en que $|i| = 1 \ \wedge \ |\bar{z}| = |z| = c$

$|(f \circ g)(z)| = |-i\bar{z}| = |-i||\bar{z}| = |i||z| = 1 \cdot c = c$

De modo que $|(g \circ f)(z)| + |(f \circ g)(z)| = c + c = 2c$ **(1.0 pto.)**

Problema 3

a) Se sabe que el Polinomio $P(x) = x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 12x + 8$ no admite raices reales y que una de sus raice tiene módulo 2.

Determine las raices de $P(x)$.

$P(x)$ tiene coeficientes reales, de modo que si $a + bi$ es raiz de P también es raiz $a - bi$.

Así, $P(x)$ debe ser divisible por $(x - (a + bi))(x - (a - bi))$, es decir P es divisible por $(x - a)^2 - (bi)^2 = x^2 - 2ax + a^2 + b^2$

Pero $|a + bi| = 2 \Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = 2 \Rightarrow a^2 + b^2 = 4$. Entonces $P(x)$ es divisible por

$x^2 - 2ax + 4$ **(1.0 pto.)**

Efectuamos la división

$(x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 12x + 8) : (x^2 - 2ax + 4) = x^2 + (2a - 4)x + 4a^2 - 8a + 6$

$$\frac{x^4 - 2ax^3 + 4x^2}{(2a-4)x^3 + 6x^2 - 12x + 8}$$

$$\frac{(2a-4)x^3 - 2a(2a-4)x^2 + 4(2a-4)x}{(4a^2-8a+6)x^2 + (-8a+4)x + 8}$$

$$\frac{(4a^2-8a+6)x^2 - 2a(4a^2-8a+6)x + 4(4a^2-8a+6)}{[2a(4a^2-8a+6) - 8a + 4]x - 4(4a^2-8a+6) + 8}$$

El resto debe ser nulo, entonces $4(4a^2 - 8a + 6) = 8 \Rightarrow 4a^2 - 8a + 6 = 2$

$\Rightarrow a^2 - 2a + 1 = 0 \Rightarrow (a - 1)^2 = 0 \Rightarrow a = 1$

y $a = 1$ verifica que $2a(4a^2 - 8a + 6) - 8a + 4 \equiv 0$ **(1.0 pto.)**

De modo que con $a = 1$ $P(x)$ puede factorizarse como

$P(x) = x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 12x + 8 = (x^2 - 2x + 4) \cdot (x^2 - 2x + 2)$

Así, las 4 raices complejas de $P(x)$ se calcularán de

$x^2 - 2x + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4-16}}{2} = 1 \pm i\sqrt{3} \quad (|1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{1+3} = 2)$

$\wedge\ x^2 - 2x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = 1 \pm i$

Las raices de $P(x)$ son $\{1 + i\sqrt{3}, 1 - i\sqrt{3}, 1 + i, 1 - i\}$ **(1.0 pto.)**

b) Determinar un polinomio $P(x)$, mónico, de grado 3, que sea divisible por $x - 1$ y tal que los restos de sus divisiones por $x - 2, x - 3$, y $x - 4$ sean iguales.

Se sabe que $P(x)$ es de grado 3 y es divisible por $x - 1$, de modo que puede escribirse como $P(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$, pero P es mónico, así: $a = 1$

Entonces $P(x) = (x - 1)(x^2 + bx + c)$, b y c por determinar. **(1.0 pto.)**

Recordando que el resto de la división de $P(x)$ por $x - \alpha$ es $P(\alpha)$, los restos de dividir $P(x)$ por $x - 2, x - 3$ y $x - 4$ serán $P(2), P(3)$ y $P(4)$.

Así $P(2) = 4 + 2b + c$

$P(3) = 2(9 + 3b + c) = 18 + 6b + 2c$

$P(4) = 3(16 + 4b + c) = 48 + 12b + 3c$

Pero los restos son iguales $P(2) = P(3) \Rightarrow 4 + 2b + c = 18 + 6b + 2c$

$\Rightarrow \boxed{4b + c = -14}$

Y $P(3) = P(4) \Rightarrow 18 + 6b + 2c = 48 + 12b + 3c$

$\Rightarrow \boxed{6b + c = -30}$

De donde

$$\left.\begin{array}{l} 4b + c = -14 \\ 6b + c = -30 \end{array}\right\} \Rightarrow b = -8, c = 18$$

De modo que $P(x) = (x - 1)(x^2 - 8x + 18)$ o bién $P(x) = x^3 - 9x^2 + 26x - 18$ **(2.0 ptos.)**