Pauta 2º Control Recuperativo, MA11A Álgebra

Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile.
Semestre Primavera 2005

El objetivo de esta pauta es orientar la corrección de los ayudantes y dar al alumno una guía de estudio.

P1. a) Consideremos ejes U', V' paralelos a U, V pero que pasen por el origen.
Las variables u, v del enunciado se relacionan con las variables u', v' de los ejes U', V' mediante $v' = v \quad u' = u + 1$. Así en las variables u', v' la cónica tiene ecuación

$$\frac{(u'-1)^2}{2^2} + (v')^2 = 1 \qquad \textbf{(0.5 ptos.)}$$

Escribamos por ahora $\theta = \frac{\pi}{3}$.

Las variables u', v' se relacionan con x, y mediante las fórmnulas:

$$x = u' \cos\theta - v' \operatorname{sen}\theta$$

$$y = u' \operatorname{sen}\theta + v' \cos\theta$$

(0.5 ptos.)

En forma matricial $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix}$ donde $\cos\theta = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Como la matriz $P = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ satisface $P^t = P^{-1}$ tenemos

$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad \textbf{(0.5 ptos.)}$$

Retomemos la forma cuadrática

$$\frac{(u'-1)^2}{2^2} + (v')^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{(u)^2}{2^2} + (v')^2 - \frac{u'}{2} + \frac{1}{4} = 1$$

$$\Leftrightarrow [u'v'] \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} - \frac{u'}{2} = \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow [x, y] \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad \textbf{(0.5 ptos.)}$$

$$-\frac{1}{2}(\cos\theta \cdot x + \operatorname{sen}\theta y) = \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow [x, y] \begin{bmatrix} \frac{1}{4}\cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \frac{1}{4}\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \frac{1}{2}(x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta) = \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow [x, y] \begin{bmatrix} \frac{1}{4}\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta & -\frac{3}{4}\operatorname{sen}\theta\cos\theta \\ -\frac{3}{4}\operatorname{sen}\theta\cos\theta & \cos^2\theta + \frac{1}{4}\operatorname{sen}^2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \frac{1}{2}(x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta) = \frac{3}{4}$$

Reemplazando $\cos\theta = \frac{1}{2}, \operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$[x, y] \begin{bmatrix} \frac{1}{4}\frac{1}{4} + \frac{3}{4} & -\frac{3}{4}\frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{3}{4}\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\frac{3}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\left(x\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}y\right) = \frac{3}{4}$$

$$[x, y] \begin{bmatrix} \frac{13}{16} & \frac{-3\sqrt{3}}{16} \\ \frac{-3\sqrt{3}}{16} & \frac{7}{16} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \frac{1}{4}x - \frac{\sqrt{3}}{4}y = \frac{3}{4}$$

$$\frac{13}{16}x^2 - \frac{3\sqrt{3}}{8}xy + \frac{7}{16}y^2 - \frac{1}{4}x - \frac{\sqrt{3}}{4}y = \frac{3}{4} \qquad \textbf{(1.0 pto.)}$$

b) Diagonalice la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 & -2 \\ 1 & 3-\lambda & 2 \\ -2 & 2 & -\lambda \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\det(A-\lambda I) &= (3-\lambda)((3-\lambda)(-\lambda)-4) - 1(-\lambda+4) - 2(2-2(3-\lambda)) \\
&= (3-\lambda)(-3\lambda+\lambda^2-4) + \lambda - 4 - 2(8-2\lambda) \\
&= (3-\lambda)(\lambda-4)(\lambda+1) + \lambda - 4 + 4(\lambda-4) \\
&= (\lambda-4)((3-\lambda)(\lambda+1)+5) \\
&= (\lambda-4)(3\lambda+3-\lambda^2-\lambda+5) \\
&= (\lambda-4)(-\lambda^2+2\lambda+8) \\
&= -(\lambda-4)(\lambda^2-2\lambda-8) \\
&= -(\lambda-4)(\lambda-4)(\lambda+2) \\
&= -(\lambda-4)^2(\lambda+2)
\end{aligned}$$

Los valores propios son 4 con mult. alg. 4 y -2 con multiplicidad 1. **(1.0 pto.)**

Espacio propio para $\lambda = 4$

$$A - 4I = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} -x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \\ x_1 &= x_2 - 2x_3 \end{aligned}$$

$\ker(A-4I)$ está generado por $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ **(0.5 ptos.)**

Espacio propio para $\lambda = -2$

$$A + 2I = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} (2^a)\cdot 5 - 1^a \\ 3^a + (2^a)\cdot 2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 5 & 1 & -2 \\ 0 & 24 & 12 \\ 0 & 12 & 6 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 5 & 1 & -2 \\ 0 & 24 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \qquad \begin{aligned} 5x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 2x_2 + x_3 &= 0 \\ \\ x_2 &= -\tfrac{1}{2}x_3 \end{aligned}$$

$$5x_1 = -x_2 + 2x_3 = \frac{1}{2}x_3 + 2x_3 = \frac{5}{2}x_3$$

$$x_1 = \frac{1}{2}x_3$$

$\ker(A+2I)$ está generado por

$v_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$ o $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ **(0.3 ptos.)**

Utilizamos Gram-Schmidt para encontrar una base ortonormal de $\ker(A-4I)$.

$$\tilde{v}_2 = v_2 - \frac{< v_1, v_2 >}{||v_1||^2} v_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{(-2)}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Luego una base ortonormal de $\ker(A-4I)$ es

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$ **(0.5 ptos.)**

Finalmente $A = PDP^t$ si definimos

$$P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

P.2 a) i) Sea λ valor propio de A. Entonces existe $v \neq 0$ con

$$Av = \lambda v$$ **(0.5 ptos.)**

$$\Rightarrow A^2 v = \lambda A v = \lambda^2 v$$

Pero $A^2 = I \Rightarrow v = \lambda^2 v \Rightarrow \lambda^2 = 1$.
Entonces $\lambda = \pm 1$. **(0.5 ptos.)**

ii) Tenemos $A = PJP^{-1}$ con J en forma de Jorgan.

Entonces $A^2 = PJ^2P^{-1} = I \Rightarrow J^2 = I$. **(0.5 ptos.)**

Si $J = \begin{bmatrix} B_1 & & & 0 \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & B_n \end{bmatrix} J^2 = \begin{bmatrix} B_1^2 & & & 0 \\ & B_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & B_n^2 \end{bmatrix}$

donde $B_I, 1 \leq i \leq n$ son bloques de la forma

$$B_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

Se tiene que

$$B_i^2 = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \ddots & & 1 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_i^2 & 2\lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 2\lambda_i \\ & & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

Si el tamaño de B_i es mayor que 1,

$B_i^2 \neq I$ **(0.5 ptos.)**

Conclusión: todos los bloques de Jordan son de tamaño 1.
$\Rightarrow A$ es diagonalizable.
Como A es diagonalizable existe una base β de vectores propios que podemos separar como $\beta = \beta_+ \cup \beta_-$, con

$$\begin{aligned} v \in \beta_+ \Leftrightarrow &\quad v \text{ es vector propio con valor propio } 1 \\ v \in \beta_- \Leftrightarrow &\quad v \text{ es vector propio con valor propio } -1 \end{aligned}$$

Entonces β_+ es base de $\ker(A - I)$
β_- es base de $\ker(A + I)$
y como $\beta_+ U \beta_-$ es base de $\mathbb{R}^n$. **(1.0 pto.)**

$$\mathbb{R}^n =< \beta_+ > \oplus < \beta_- >= \ker(A - I) \oplus \ker(A + I)$$

b) $A + B$ es idempotente $\Leftrightarrow$

$$(A + B)^2 = A + B$$

Pero

$$\begin{aligned} (A + B)^2 &= (A + B)(A + B) \\ &= A^2 + AB + BA + B^2 \\ &= A + B + AB + BA \end{aligned}$$

NOTA: en general $AB \neq BA$ Así

$$\begin{aligned} (A + B)^2 = A + B &\Leftrightarrow AB + BA = 0 \\ &\Leftrightarrow AB = -BA \end{aligned}$$ **(1.0 pto.)**

c) i) $A = (a_{ij}) \quad B = (b_{ij}) \quad 1 \leq i \quad , \quad j \leq n.$
El elemento (i, i) de $A \cdot B$ es

$$(A \cdot B)_{i,i} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ji}$$

$$\Rightarrow tr(AB) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ji}$$ **(0.5 ptos.)**

El elemento (i, i) de $B \cdot A$ es

$$(B \cdot A)_{i,i} = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} a_{ji}$$ **(0.5 ptos.)**

$$\Rightarrow tr(BA) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} a_{ji} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{ji} a_{ij} = tr(A \cdot B)$$

ii) $A = PBP^{-1}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow tr(A) &= tr(PBP^{-1}) \\ &= tr(P^{-1}PB) \\ &= tr(B) \end{aligned}$$ **(1.0 pto.)**

P3. a) T está definida sobre 5 vectores de $\mathbb{R}^4$: Primero encontremos una base

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \qquad \textbf{(0.5 ptos.)}$$

Dados $x_1, \ldots, x_4 \in \mathbb{R}$ busquemos $y_1, \ldots, y_4$ tales que

$$y_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + y_4 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(0.5 ptos.)}$$

$$\left.\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right| \begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \rightarrow \left.\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right| \begin{array}{l} x_1 \\ x_2 - x_1 \\ x_3 \\ x_4 \end{array}$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right| \begin{array}{l} x_1 \\ x_2 - x_1 \\ x_3 + x_2 - x_1 \\ x_4 \end{array} \rightarrow \left.\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right| \begin{array}{l} x_1 \\ x_2 - x_1 \\ x_3 + x_2 - x_1 \\ 2x_4 + x_3 + x_2 + x_1 \end{array} \qquad \textbf{(1.0 pto.)}$$

$$\begin{aligned}
y_4 &= -\frac{1}{2}(2x_4 + x_3 + x_2 - x_1) = +\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - x_4 \\
y_3 &= -\frac{1}{2}(x_3 + x_2 - x_1) = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 \\
-y_2 - 3y_3 &= x_2 - x_1 \\
y_2 + 3y_3 &= x_1 - x_2 \\
y_2 &= x_1 - x_2 - 3y_3)x_1 - x_2 - 3\left(\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3\right) \\
y_2 &= -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3 \\
y_1 &= -y_2 - y_3 - y_4 + x_1 \\
&= \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + x_4 + x_1 \\
&= \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + x_4
\end{aligned} \qquad \textbf{(1.0 pto.)}$$

$$T\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix} = y_1T\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix} + y_2T\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix} y_3T\begin{bmatrix}1\\-2\\1\\1\end{bmatrix} + y_4T\begin{bmatrix}1\\1\\0\\-1\end{bmatrix}$$

$$= y_1\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix} + y_2\begin{bmatrix}2\\1\\2\\-1\end{bmatrix} + y_3\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix} + y_4\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$= \left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + x_4\right)\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix} + \left(-\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3\right)\begin{bmatrix}2\\1\\2\\-1\end{bmatrix}$$

$$+ \left(\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3\right)\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix} + \left(\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - x_4\right)\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)x_1 & + & \left(\frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)x_2 & + & \left(-\frac{1}{2} + 3 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)x_3 & + & (1-1)x_4 \\ \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)x_1 & + & \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)x_2 & + & \left(-\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right)x_3 & + & (-1)x_4 \\ \left(\frac{1}{2} - 1\right)x_1 & + & \left(\frac{1}{2} + 1\right)x_2 & + & \left(-\frac{1}{2} + 3\right)x_3 & + & (1)x_4 \\ \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)x_1 & + & \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)x_2 & + & \left(-\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right)x_3 & + & 0\cdot x_4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3 \\ +x_3 - x_4 \\ -\frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_2 + \frac{5}{2}x_3 + x_4 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 \end{bmatrix}$$

(1.0 pto.)

b) matriz representante

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & +1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

(1.0 pto.)

c) $\ker(T)$

$$\begin{array}{cccc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{c} \rightarrow \\ 3^a = 3^a + 1^a \\ 4^a = 4^a - 2(1^a) \end{array} \quad \begin{array}{cccc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & -5 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \rightarrow \\ 4^a = 4^a + 3^a \end{array} \quad \begin{array}{cccc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{cccc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$x_3 - x_4 = 0 \quad x_3 = x_4$$

$$2x_2 + 4x^3 + x_4 = 0$$

$$x_2 = \frac{1}{2}(-4x_3 - x_4) = \frac{1}{2}(-4x_4 - x_4) = -\frac{5}{2}x_4$$

$$\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3 = 0$$

$$x_1 = -x_2 - 3x_3 = -\left(-\frac{5}{3}x_4\right) - 3x_4 = \frac{-1}{2}x_4$$

$\ker(T)$ está generado po $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ **(0.5 ptos.)**

$Im(T)$: buscamos los vectores l.i. en

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}$$

Los vectores $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ forma un base de $Im(T)$. **(0.5 ptos.)**