CONTROL RECUPERATIVO
ALGEBRA MA11A

31 DE AGOSTO, 2003

Tiempo : 3 horas

Problema 1:

(1) Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una progresión aritmética de razón d. Entonces, pruebe que:
(a)

$$\frac{a_n - a_1}{d} = n - 1.$$

(1 ptos.)

(b)

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{a_i} + \sqrt{a_{i+1}}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_1}}.$$

(2 ptos.)

(2) Considere la sucesión definida por recuerrencia de la siguiente forma:

$$a_1 = a_2 = 1 \qquad a_n = 1 + a_{n-1} + 2a_{n-2}, \quad \forall n \geq 3.$$

Pruebe que para todo $n \geq 1$ se tiene que

$$a_n = 2^{n-1} - \frac{(-1)^n + 1}{2}.$$

(3 ptos.)

Solución:

(1) (a) Notemos que si $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una progresión geométrica de razón d, entonces se tiene que

$$a_n = a_0 + nd, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

luego

$$a_n - a_1 = (a_0 + nd) - (a_0 + d) = (n-1)d,$$

es decir,

$$\frac{a_n - a_1}{d} = n - 1.$$

(b) Notemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{a_i}+\sqrt{a_{i+1}}} &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{a_i}+\sqrt{a_{i+1}}} \cdot \frac{\sqrt{a_i}-\sqrt{a_{i+1}}}{\sqrt{a_i}-\sqrt{a_{i+1}}} \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\sqrt{a_i}-\sqrt{a_{i+1}}}{a_i - a_{i+1}} \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\sqrt{a_i}-\sqrt{a_{i+1}}}{-d} \\
&= \frac{1}{d} \sum_{i=1}^{n-1} (\sqrt{a_{i+1}}-\sqrt{a_i}) \\
&= \frac{1}{d} (\sqrt{a_n}-\sqrt{a_1}) \\
&= \frac{(\sqrt{a_n}-\sqrt{a_1})}{d} \cdot \frac{(\sqrt{a_n}+\sqrt{a_1})}{(\sqrt{a_n}+\sqrt{a_1})} \\
&= \frac{(a_n - a_1)}{d} \cdot \frac{1}{(\sqrt{a_n}+\sqrt{a_1})} \\
&= \frac{n-1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_1}}.
\end{aligned}$$

(Notemos que este problema también se puede resolver utilizando inducción matemática.)

(2) Para probar esto, aplicaremos inducción matemática.

Notemos que

$$a_1 = 1 = 2^0 - \left(\frac{(-1)^1+1}{2}\right),$$

lo que prueba que la identidad es verdadera para $n = 1$.

Hipótesis de Inducción:

Supongamos que

$$a_k = 2^{k-1} - \left(\frac{(-1)^k+1}{2}\right), \qquad \forall k \leq n.$$

Tesis de Inducción:

Por demostrar que

$$a_{n+1} = 2^n - \left(\frac{(-1)^{n+1}+1}{2}\right).$$

En efecto

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= 1 + a_n + 2a_{n-1}\\
&= 1 + \left[2^{n-1} - \left(\frac{(-1)^n+1}{2}\right)\right] + 2\left[2^{n-2} - \left(\frac{(-1)^{n-1}+1}{2}\right)\right]\\
&= 1 + 2^{n-1} - \left(\frac{(-1)^n+1}{2}\right) + 2^{n-1} - (-1)^{n-1} - 1\\
&= 2^n - \left(\frac{(-1)^n+1}{2}\right) - (-1)^{n-1}\\
&= 2^n - \left(\frac{(-1)^n+1}{2}\right) - (-1)^{n+1}\\
&= 2^n - \left(\frac{(-1)^n+1+2(-1)^{n+1}}{2}\right)\\
&= 2^n - \left(\frac{(-1)^{n+1}+1}{2}\right)
\end{aligned}$$

Problema 2:

(1) Encuentre todas las soluciones $z \in \mathbb{C}$ de la ecuación

$$\left(\frac{z^4+3}{z^4}\right)^2 + \left(\frac{z^4+3}{z^4}\right) - 2 = 0.$$

(2 ptos.)

(2) Pruebe que

$$Re\left(\frac{1+z}{1-z}\right) > 0 \qquad si \quad |z| < 1.$$

(2 ptos.)

(3) Sea $z_n = x_n + iy_n = \left(1+i\sqrt{3}\right)^{3n}$. Encuentre la forma polar de z_n y pruebe que la parte real de z_n, x_n, verifica

$$x_n + 8\,x_{n-1} = 0.$$

(2 ptos.)

Solución:

(1) Sea

$$u = \frac{z^4+3}{z^4},$$

entonces se tiene,

$$u^2 + u - 2 = 0 \Rightarrow u = 1 \quad \vee\, u = -2,$$

así si $u = 1$ tenemos que

$$\frac{z^4+3}{z^4} = 1 \Longrightarrow z^4 + 3 = z^4 \Longrightarrow 3 = 0,$$

lo que es imposible y $u = 1$ no tiene solución.

Si $u = -2$ entonces se tiene que

$$\frac{z^4+3}{z^4} = -2 \Longrightarrow z^4 + 3 = -2z^4 \Longrightarrow 3 = -3z^4 \Longrightarrow z^4 = -1,$$

lo que muestra que las soluciones son las raíces cuartas de -1, luego como

$$-1 = e^{i\pi},$$

entonces las raíces cuartas de -1 son de la forma

$$z_k = e^{i(\pi+2k\pi)/4}, \qquad k = 0, 1, 2, 3,$$

es decir

$$\begin{aligned} z_0 &= e^{i\pi/4}, \\ z_1 &= e^{i3\pi/4}, \\ z_2 &= e^{i5\pi/4}, \\ z_3 &= e^{i7\pi/4}. \end{aligned}$$

(2) Notemos que si $z = (a + ib) \in \mathbb{C}$ entonces

$$\frac{1+z}{1-z} = \frac{1+a+ib}{1-a-ib} = \frac{(1+a)+ib}{(1-a)-ib} \cdot \frac{(1-a)+ib}{(1-a)+ib} = \frac{\left[(1-a^2)-b^2\right]+2ib}{(1-a)^2+b^2},$$

Luego

$$Re\left(\tfrac{1+z}{1-z}\right) = Re\left(\tfrac{\left[(1-a^2)-b^2\right]+2ib}{(1-a)^2+b^2}\right) = \tfrac{\left(1-a^2-b^2\right)}{(1-a)^2+b^2} > 0 \Leftrightarrow \left(1-a^2-b^2\right),$$

por lo tanto

$$Re\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \frac{\left(1-a^2-b^2\right)}{(1-a)^2+b^2} > 0 \Longleftrightarrow a^+b^2 < 1 \Longleftrightarrow |z| < 1.$$

(3) Notemos que si

$$z = 1 + i\sqrt{3},$$

entonces

$$z = 2e^{i\pi/3}$$

y luego

$$z_n = z^{3n} = \left(2e^{i\pi/3}\right)^{3n} = 2^{3n}e^{in\pi} = 8^n e^{in\pi} = 8^n\left(\cos(n\pi) + i\text{sen }(n\pi)\right) = 8^n(-1)^n.$$

Así tenemos que

$$x_n = 8^n(-1)^n,$$

y de esta forma

$$x_n + 8x_{n-1} = 8^n(-1)^n + 88^{n-1}(-1)^{n-1} = 8^n\left((-1)^n + (-1)^{n-1}\right) = 0.$$

Sea $z_n = x_n + iy_n = \left(1+i\sqrt{3}\right)^{3n}$. Encuentre la forma polar de z_n y pruebe que la parte real de z_n, x_n, verifica

$$x_n + 8\,x_{n-1} = 0.$$

Lo que completa la demostración.

Problema 3:

(1) Sean $(G, \cdot)$ y $(G', *)$ dos grupos y sea $\phi : G \to G'$ un homomorfismo entre grupos. Sea e el elemento neutro de G'. Sea H el kernel de ϕ, es decir

$$H = \{h \in G \quad : \quad \phi(h) = e\}.$$

Si definimos para cada $a \in G$ el conjunto

$$H \cdot a = \{h \cdot a \quad : h \in H\}.$$

Pruebe que

$$H \cdot a = \{x \in G \quad : \quad \phi(x) = \phi(a)\}.$$

(2 ptos.)

(2) Sea $S = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ y definamos la operación

$$a * b = 2a + 2b + ab + 2, \qquad \forall a, b \in S.$$

(a) Pruebe que $*$ es conmutativa y asociativa en S.

(1 ptos.)

(b) Encuentre, si es posible, el neutro $e \in S$ para $*$ en S. Pruebe además que $(S, *)$ es un grupo Abeliano y para cada $a \in S$, encuentre a^{-1}.

(1 ptos.)

(c) Sea

$$H = \{2^n - 2 \quad : \quad \forall n \in \mathbb{Z}\}.$$

Muestre que $(H, *)$ es un subgrupo de $(S, *)$. Además si definimos

$$a^{(m)} = \begin{cases} \underbrace{a * a * \cdots * a}_{m-veces}, & m > 0 \\ e, & m = 0 \\ \underbrace{a^{-1} * a^{-1} * \cdots * a^{-1}}_{m-veces}, & m < 0. \end{cases}$$

Pruebe que existe $a \in S$ tal que

$$H = \left\{ a^{(m)} \quad : \quad m \in \mathbb{Z} \right\}.$$

(2 ptos.)

Solución:

(1) Para demostrar esta igualdad de conjuntos, probaremos la doble inclusión.

Veamos en primer lugar que

$$H \cdot a \subseteq \{x \in G \quad : \quad \phi(x) = \phi(a)\}.$$

En efecto, sea $x = h \cdot a \in H \cdot a$, luego como ϕ es un homomorfismo de grupos, se tiene que

$$\phi(x) = \phi(h \cdot a) = \phi(h) * \phi(a) = e * \phi(a) = \phi(a),$$

lo que prueba la inclusión.

Veamos ahora que

$$\{x \in G \quad : \quad \phi(x) = \phi(a)\} \subseteq H \cdot a.$$

En efecto, sea $x \in G$ tal que $\phi(x) = \phi(a)$, entonces se tiene que como $a \in G$, existe $a^{-1} \in G$, el inverso de a, por lo tanto tenemos que puesto que ϕ es un homomorfismo de grupos

$$\phi(x \cdot a^{-1}) = \phi(x) * \phi(a^{-1}) = \phi(a) * \phi(a^{-1}) = \phi(a \cdot a^{-1}) = e.$$

Así tenemos que$x \cdot a^{-1} \in H$ y luego existe $h \in H$ tal que

$$h = x \cdot a^{-1} \Longleftrightarrow h \cdot a = x \Longrightarrow x \in H \cot a$$

y por tanto se prueba la segunda inclusión.

Luego tenemos que

$$H \cdot a = \{x \in G \quad : \quad \phi(x) = \phi(a)\}.$$

(2) (a) Veamos que $*$ es conmutativa y asociativa en S.

Notemos en primer lugar que si $a, b \in S$, entonces $a * b \in S$, en efecto si

$$\begin{aligned} a * b &= -2 \Leftrightarrow 2a + 2b + ab + 2 = -2 \Leftrightarrow a(2+b) + 2b + 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow a(2+b) + 2(b+2) = 0 \Leftrightarrow (a+2)(b+2) = 0, \end{aligned}$$

lo cual es imposible ya que $a, b \in S = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Veamos la conmutatividad, en efcto sean $a, b \in S$, entonces dado que $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ es un cuerpo, se tiene que

$$a * b \quad = 2a + 2b + ab + 2 = 2b + 2a + ba + 2 = b * a,$$

lo que prueba la conmutatividad.

Veamos ahora la asociatividad, entonces si $a, b, c \in S$, entonces

$$\begin{aligned} (a * b) * c &= (2a + 2b + ab + 2) * c \\ &= 2(2a + 2b + ab + 2) + 2c + (2a + 2b + ab + 2)c + 2 \\ &= 4a + 4b + 2ab + 4 + 2c + 2ac + 2bc + abc + 2c + 2 \\ &= 4a + 4b + 4c + 2ab + 2ac + 2bc + abc + 6 \\ &= 2a + (a(2b + 2c + bc + 2) + 2(2b + 2c + bc + 2)) + 2 \\ &= 2a + 2(2b + 2c + bc + 2) + a(2b + 2c + bc + 2) + 2 \\ &= a * (2b + 2c + bc + 2) = a * (b * c), \end{aligned}$$

lo que prueba la asociatividad.

(b) Busquemos el neutro e en $(S, *)$. Sea $a \in S$, entonces si $e \in S$ es el neutro se tiene que

$$\begin{aligned} a * e &= a \Longrightarrow 2a + 2e + ae + 2 = a \Longrightarrow a + ae + 2e + 2 = 0 \\ &\Longrightarrow a(1+e) + 2(e+1) = 0 \Longrightarrow (a+2)(e+1) = 0, \end{aligned}$$

y dado que $a \in S = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, entonces

$$(a+2)(e+1) = 0, \ \forall a \in S \Longleftrightarrow e = -1,$$

así el elemento neutro de $(S, *)$ es $e = -1$.

Para demostrar que $(S, *)$ es un grupo, nos resta mostrar que para cada $a \in S$, existe un inverso, es decir, existe $a^{-1} \in S$ tal que

$$a * a^{-1} = -1.$$

En efecto,

$$\begin{aligned} a * b = -1 \quad &\Longleftrightarrow 2a + 2b + ab + 2 = -1 \\ &\Longleftrightarrow 2a + 2b + ab + 3 = 0 \\ &\Longleftrightarrow b(a+2) = -2a - 3 \\ &\Longleftrightarrow b = \frac{-2a-3}{a+2} \end{aligned}$$

y como $a \neq -2$, entonces tenemos que

$$a^{-1} = \frac{-2a-3}{a+2},$$

lo que muestra que cada elemento $a \in S$ tiene un inverso.

De lo anterior se concluye que $(S, *)$ es un grupo Abeliano.

(c) En primer lugar veamos que H es un subgrupo de G. Sea $n \in \mathbb{Z}$, entonces

$$(2^n-2)^{-1} = \frac{-2(2^n-2)-3}{(2^n-2)+2} = \frac{-2^{n-1}+4-3}{2^n} = \frac{-2^{n-1}+1}{2^n} = -2+2^{-n} = 2^{-n}-2,$$

luego para cada $n \in \mathbb{Z}$ tenemos que

$$(2^n-2)^{-1} = 2^{-n}-2 \in H.$$

Así que nos resta probar que para cada $a, b \in H$ se tiene que $a * b^{-1} \in H$. En efecto, sean $(2^n-2), (2^m-2) \in H$, entonces

$$\begin{aligned}(2^n-2)*(2^m-2)^{-1} &= (2^n-2)*(2^{-m}-2)\\ &= 2(2^n-2)+2(2^{-m}-2)+(2^n-2)(2^{-m}-2)+2\\ &= 2^{n+1}-4+2^{1-m}-4+2^{n-m}-2^{n+1}-2^{1-m}+4+2\\ &= 2^{n-m}-2 \in H,\end{aligned}$$

lo que prueba que H es un subgrupo de G.

Nos resta ver que existe $a \in H$ tal que

$$H = \left\{a^{(n)} \quad : \quad m \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Buscaremos $a \in H$ tal que

$$a^{(n)} = 2^n - 2, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Como

$$a^{(0)} = -1 \qquad \text{y} \qquad a^{(1)} = a$$

entonces supondremos que

$$a = a^{(1)} = 2^1 - 2 = 0.$$

Por demostrar que $0^(n) = 2^n - 2$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Es claro ver que basta probar que la identidad es verdadera para $n \geq 0$, ya que $(0^(n))^{-1} = 0^(-n)$.
Es claro que la identidad es verdadera para $n = 1$, aplicaremos entonces inducción matemática para probar esta identidad.

Hipótesis de Inducción:
Supongamos que

$$0^{(k)} = 2^k - 2, \qquad \forall k \leq n.$$

Tesis de Inducción:
Por demostrar que

$$0^{(n+1)} = 2^{n+1} - 2.$$

En efecto, notemos que

$$\begin{aligned}0^{(n+1)} &= 0^{(n)} * 0\\ &= 2 \cdot 0^{(n)} 2 \cdot 0 + 0^{(n)} \cdot 0 + 2\\ &= 2 \cdot (2^n - 2) + 2\\ &= 2 \cdot 2^n - 4 + 2\\ &= 2^{n+1} - 2,\end{aligned}$$

lo que prueba que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$0^{(n)} = 2^n - 2,$$

además como

$$0^{(-n)} = (0^{(n)})^{-1} = 2^{-n} - 2,$$

se prueba que para todo $n \in \mathbb{Z}$ se tiene que

$$0^{(n)} = 2^n - 2,$$

por lo tanto

$$H = \{0^{(n)} \, : \, n \in \mathbb{Z}\}$$

lo que completa la demostración.