Pauta Control Recuperativo MA11A Algebra
Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile
Semestre 2006-1 (3 de Agosto)

Problema 1

i) Sean $z_1, z_2, ..., z_n \in \mathbb{C}$ tales que $|z_1| = |z_2| = ... = |z_n| = 1$.

Demuestre que $|z_1 + z_2 + ... + z_n| = |\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + ... + \frac{1}{z_n}|$

Recordar que $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z_x|^2} = \frac{\bar{z}}{1}$, en que $|z|^2 = 1^2 = 1 \quad \forall z_i, i = 1, ..., n$.

Así $\left|\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + ... + \frac{1}{z_n}\right| = \left|\frac{\bar{z}}{|\bar{z}_1|^2} + \frac{\bar{z}_2}{|z_2|^2} + ... + \frac{\bar{z}_n}{|z_n|^2}\right|$ (0.8 ptos.)

$$\begin{aligned} &= |\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + ... + \bar{z}_n| = |\overline{z_1 + z_2 + ... + z_n}| \\ &= |z_1 + z_2 + ... + z_n| \end{aligned}$$

En donde se usó que $|\bar{z}| = |z| \quad \forall z \in \mathbb{C}$ y $\overline{\sum_{i=1}^{n} z_i} = \sum_{i=1}^{n} \bar{z}_i$. (0.7 ptos.)

ii) Sea $\theta \in \mathbb{R}$ un real fijo. Demuestre que el polinomio

$P(x) = (cos\theta + xsen\theta)^n - cos(n\theta) - xsen(n\theta)$ es divisible por $x^2 + 1$.

Recordar que si $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ son raíces de $P(x)$ entonces

$(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)...(x - \alpha_k)/P(x)$ (Divisor de P)

En este caso, i y $-i$ son raíces de $x^2 + 1$ es decir $x^2 + 1 = (x + i)(x - i)$ de modo que si i y $-i$ son raíces de P, $(x - i)(x + i) = x^2 + 1$ será divisor de P. (0.7 ptos.)

En efecto

$$\begin{aligned} P(i) &= (cos\theta + isen\theta)^n - cos(n\theta) - isen(n\theta) \\ &= cosn\theta + isenn\theta - cosn\theta - isen(n\theta) = 0 \end{aligned}$$

en donde se uso la identidad de De Moivre.

Análogamente $P(-i) = 0$, lo que concluye la demostración. (0.8 ptos.)

iii) Encontrar los valores de $n \in \mathbb{N}$ que resuelven la ecuación

$$\left(\frac{\sqrt{3} - i}{2}\right)^{2n} - \left(\frac{\sqrt{3} + i}{2}\right)^{2n} = i\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} \left|\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right| &= \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1 \text{ y } tg\varphi = \frac{-1}{\sqrt{3}} \rightarrow \varphi = -\pi/6 \text{ por lo tanto } \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} = e^{-i\pi/6} \\ \left|\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right| &= \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1 \text{ y } tg\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow \varphi = \pi/6 \text{ por lo tanto } \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} = e^{i\pi/6} \end{aligned}$$

así $\left(\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{2n} - \left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{2n} = i\sqrt{3} \Leftrightarrow e^{-\frac{2n\pi}{6}} - e^{i\frac{2n\pi}{6}} = i\sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow cos(\frac{-2n\pi}{6}) + isen(\frac{-2n\pi}{6}) - \left[cos\frac{2n\pi}{6} + isen\frac{2n\pi}{6}\right] = i\sqrt{3}$$

(1.5 ptos.)

$$\Leftrightarrow cos(\frac{-2n\pi}{6}) - isen(\frac{-2n\pi}{6}) - cos\frac{2n\pi}{6} - isen\frac{2n\pi}{6} = i\sqrt{3}$$

$\Rightarrow -2isen\frac{2n\pi}{6} = i\sqrt{3}$

Entonces $sen\frac{n\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} = arcsen(\frac{4\pi}{3})$ (0.5 ptos.)

De modo que $\frac{n\pi}{3} = 2k\pi + \frac{4\pi}{3} \Rightarrow n_1 = 6k + 4$ (Pares)

y $\frac{n\pi}{3} = (2k+1)\pi - \frac{4\pi}{3} \Rightarrow n_2 = 6k - 1$ (Impares)

Así, los valores de $n \in \mathbb{N}$ que resuelven la ecuación son:

$$\{6k + 4, 6k - 1/k \in \mathbb{N}\}$$

(1.0 ptos.)

Problema 2

i) Considere el polinomio $P(x) = x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 22x + 13$.

Se sabe que $x_1 = 2 + 3i$ es raíz de $P(x)$ y se pide:

Encontrar todas las raices de P y factorícelo en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{C}$.

Los coeficientes de $P(x)$ son reales, de modo que si $x_1 = 2+3i$ es raíz de P, también $\bar{x}_1 = 2-3i$ es raíz

En consecuencia $P(x)$ es divisible por $[x-(2+3i)][x-(2-3i)][(x-2)-3i][(x-2)+3i] = (x-2)^2 + 9 = x^2 - 4x + 13$.

Efectuando la división

$$
\begin{array}{l}
(x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 22x + 13) : (x^2 - 4x + 13) = x^2 + 2x + 1 \\
x^4 - 4x^3 + 13 \\
\quad 2x^3 - 7x^2 + 22x + 13 \\
\quad 2x^3 - 8x^2 + 26x \\
\qquad x^2 - 4x + 13 \\
\qquad x^2 - 4x + 13 \\
\qquad\quad 0
\end{array}
$$

(1.0 pto.)

Así $P(x) = (x^2 - 4x + 13)(x^2 + 2x + 1)$ en donde $x_1 = 2 + 3i$ y $x_2 = 2 - 3i$ son dos de las raíces, y las otras dos anulan $x^2 + 2x + 1 = 0$

$$\Rightarrow (x+1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1 \ \text{ Doble}$$

Por lo tanto las raíces de P son $x_1 = 2 + 3i, x_2 = 2 - 3i, x_{3-4} = -1$ doble y

$$
\begin{aligned}
P(x) &= (x^2 - 4x + 13)(x^2 + 2x + 1) \text{ en } \mathbb{R} \\
P(x) &= (x - 2 - 3i)(x - 2 + 3i)(x^2 + 2x + 1) \text{ en } \mathbb{C}
\end{aligned}
$$

(1.0 pto.)

ii) Considere la función $F : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$ definida por $F(P(x)) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$, para cada $P \in \mathbb{R}[x]$ de la forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_o$$

a) Estudie la inyectividad y la sobreyectividad de F.

Observar que la imagen de cada polinomio es el real correspondiente a la suma de sus coeficientes.

Inyectividad: Es fácil darse cuenta que existen una infinidad de polinomios distintos tales que la suma de sus coeficientes es igual, por ejemplo, $P(x) = x^2 + x + 1 \wedge Q(x) = 4x^3 - 1$, de modo que $F(P(x)) = F(Q(x)) = 3$ pero $P(x) \neq Q(x)$. Así, F no es inyectiva.

Sobreyectividad: Por demostrar que $(\forall r \in \mathbb{R})(\exists P \in \mathbb{R}[x])$ tal que $F(P(x)) = \sum_{k=0}^{n} Q_k = r$.

Basta tomar $P(x) = r$ (Polinomio constante) para que

$F(P(x) = F(0x^n + 0x^{n-1} + ... + 0x + r) = \sum_{k=0}^{n} a_k = r$.

Así, F es sobreyectiva. (0.8 ptos.)

b) Si $F(P(x)) = 0$, indique, al menos, una de las raíces de $P(x)$.

$F(P(x) = 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} a_k = 0 \Rightarrow a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0 = 0$.

Pero $a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0 = P(1)$

Así, 1 es una de las raíces de $P(x)$. (0.5 ptos.)

iii) Sea $P(x)$ un polinomio mónico ($a_n = 1$) de grado 3 y tal que 0 y 2 son raíces de P y los restos de dividir P por $(x-1)$ y $(x-3)$ son iguales.

Determine $P(x)$ e indique todas sus raíces.

Si 0 y 2 son raíces de P, $(x-0)(x-2)$ es divisor de P.

Además $P(x)$ es mónico de grado 3 de modo que el polinomio cuociente de la división anterior debe ser mónico de la forma $x + c$

Así $P(x) = x(x-2)(x+c)$

además los restos de dividir P por $(x-1)$ y $(x-3)$ son iguales es decir $P(1) = P(3)$

Entonces $P(1) = -1 - c \wedge P(3) = 3(3+c) = 9 + 3c$

$\Rightarrow -1 - c = 9 + 3c \Rightarrow c = -5/2$

Así $P(x) = x(x-2)(x-5/2) = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 5x$ y sus raíces son: $0, 2, 5/2$. (1.0 pto.)

Problema 3

a.1) Se sabe que $f(0) = 0'$ con lo cual $0 \in I$ y por lo tanto $I \neq \phi$. Puede utilizarse alguna de las formas compactas, por ejemplo, demostrar que

1) $\forall x_1, x_2 \in I \Rightarrow x_1 + x_2 \in I$

2) $\forall x \in I \Rightarrow -x \in I$

En efecto

i) Sean $x_1, x_2 \in I$, entonces $f(x_1) = 0' \wedge f(x_2) = 0'$

Por el morfismo $f(x_1 + x_2) = f(x_1) \oplus f(x_2) = 0' + 0' = 0'$

entonces $x_1 + x_2 \in I$. (1.0 pto.)

ii) Sea $x \in I$ entonces $\exists -x \in A$ tal que $x + (-x) = 0$. Por el morfismo $f(x) \oplus f(-x) = f(x + (-x)) = f(0) = 0'$ es decir $0' \oplus f(-x) = 0'$, es decir $f(-x) = 0'$ entonces $(-x) \in I$ (1.0 pto.)

a.2) Sean $a \in A$ y $b \in I$, con esto $f(b) = 0'$

Entonces $f(a \cdot b) = f(a) \odot f(b) = f(a) \odot 0' = 0'$ (morfismo y Propiedad en Anillos)

Así, $a \cdot b \in I \wedge$ analogamente $b \cdot a \in I$ (1.0 pto.)

a.3) Sea $x \in I, x$ invertible, esto es, $\exists x^{-1} \in A$ tal que $x \cdot x^{-1} = u$ y por el morfismo $f(x \cdot x^{-1}) = f(u) = f(x) \odot f(x^{-1}) = 0'$ por propiedad en anillos $(a \cdot 0' = 0' \cdot a = 0')$.

Entonces $f(u) = 0'$ (1.0 pto.)

Sabemos que $I \subseteq A$. Probaremos que $A \subseteq I$.

Sea $a \in A$, entonces $a \cdot u = a$ y por el morfismo

$f(a \cdot u) = f(a) \Rightarrow f(a) \odot f(u) = f(a) \Rightarrow f(a) \cdot 0' = 0' = f(a) \Rightarrow a \in I$, entonces $A \subseteq I$ de donde $A = I$ (1.0 pto.)

b) Sea $x \in A$, con imagen $f(x)$ invertible en A'.

Sabemos que $x \cdot u = u \cdot x = x$ en que u es unidad en A.

Por el morfismo $f(x) \odot f(u) = f(u) \odot f(x) = f(x)$

pero $\exists f^{-1}(x) \in A'$ tal que $f^{-1}(x) \odot f(x) = f(x) \odot f^{-1}(x) = u'$ (u' neutro para $\odot$ en A')

Entonces $f(x)$ es cancelable en A', o bien, operando

$$\begin{aligned} (f(u) \odot f(x)) \odot f^{-1}(x) = f(x) \odot f^{-1}(x) \quad &\Rightarrow \quad f(u) \odot u' = u' \\ &\Rightarrow \quad f(u) = u' \end{aligned}$$

(1.0 pto.)