Pauta 2 Control Recuperativo MA11A ALGEBRA
Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile
11 de Diciembre de 2006

Problema 1.

a) Escribiendo matricialmente los vectores de S como filas y escalonando

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_4-(f_1-f_2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3-(2f_1+f_2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de donde se deduce que los dos primeros vectores de S son $\ell.i.$ y constituyen base. Así

$$B_s = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}; Dim(S) = 2$$

(1.0 pto.)

b) Se sabe que $Dim(\mathbb{R}^4) = DimKer(f) + Dim(Im(f)$
$(f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4)$ por lo tanto $4 = Dim(Kerf) + Dim(Imf)$

(0.5 ptos.)

Como $Ker(f) = S$ y $Dim(S) = 2 \Rightarrow Dim(Ker(f)) = 2$ de donde $DimIm(f) = 2$.

(0.5 ptos.)

c) Base de $Im(f)$.

De (ii) y (iii) es claro que $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ pertencen a $Im(f)$. Además:

$$\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$$

(1.5 ptos.)

Sigue que $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ es $\ell.i. \Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ es base de $Im(f)$.

d) Se sabe que, por (i) $Ker(f) = S$, de modo que, en particular, aplicando f a la base B_S

$$f\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \text{ y } f\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

(0.5 ptos.)

Además de (ii), (iii) $f\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ y $f\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$ con lo cual obtenemos 4 imágenes por f.

También, es claro que $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ es una base de $\mathbb{R}^4$ (Es casi inmediato que $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$ en la combinación lineal). Entonces, sea $x \in \mathbb{R}^4$; $x = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$ que en términos de la base anterior quedará

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

de donde

$$\left.\begin{array}{r}\alpha = x_1\\ \alpha+\beta = x_2\\ \alpha+\beta+\gamma = x_3\\ \alpha+\beta+\delta = x_4\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\alpha = x_1\\ \beta = x_2 - x_1\\ \gamma = x_3 - x_1 - (x_2 - x_1) = x_3 - x_2\\ \delta = x_4 - x_2\end{array}\right.$$

(1.0 pto.)

Sigue que, como f es aplicación lineal.

$$\begin{aligned} f(x) &= x_1 f\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + (x_2 - x_1) f\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix} + (x_3 - x_2) f\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} + (x_4 - x_2) f\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \\ &= x_1\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} + (x_2 - x_1)\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} + (x_3 - x_2)\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} + (x_4 - x_2)\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Así

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_4 - x_2 \\ -x_4 + x_2 \\ x_4 + x_3 - 2x_2 \\ -x_4 + x_2 \end{pmatrix}$$

(1.0 pto.)

Pauta Problema 2

i) El polinomio característicoes $p(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 4-\lambda \end{vmatrix}$. Así

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= (3-\lambda)[(3-\lambda)(4-\lambda)-1] - 2[2(4-\lambda)-1] + 1(2-3+\lambda) \\ &= (3-\lambda)(\lambda^2 - 7\lambda + 11) - 14 + 4\lambda + \lambda - 1 \\ &= (3-\lambda)(\lambda^2 - 7\lambda + 11) + 5(\lambda - 3) \end{aligned}$$

(0.8 ptos.)

Sigue que $p(\lambda) = (3-\lambda)(\lambda^2 - 7\lambda + 6)$ (u otra forma)

en donde $p(1) = 0$ y $\lambda = 1$ es un valor propio.

(0.2 ptos.)

ii) Los otros valores propios son $\lambda = 3$ (evidente del polinomio) y $\lambda = 6$ de la resolución de la ecuación $\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$

(0.5 ptos.)

Observación. Si no llega el polinomio factorizado, debe verificar que $p(1) = 0$ y luego dividir $p(\lambda) : (\lambda - 1)$ para encontrar los valores propios restantes.

Vectores propios

Para $\lambda = 1$ se genera

$$\begin{pmatrix} 3-1 & 2 & 1 \\ 2 & 3-1 & 1 \\ 1 & 1 & 4-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} 2x + 2y + z = 0 \\ 2x + 2y + z = 0 \\ x + y + 3z = 0 \end{array}$$

de donde $z = 0 \wedge x + y = 0$, de modo que v_1 puede ser, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Para $\lambda = 3$ queda

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} 2y + z = 0 \\ 2x + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{array}$$

de donde $x = y = -\frac{1}{2}z$ y z libre. Así, v_2 puede ser

$$v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Para $\lambda = 6$ queda

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} -3x + 2y + z = 0 \\ 2x - 3y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{array}$$

Resolviendo o escalonando se concluye que $x = y = z$, así, v_3 puede ser

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Además, A es definida positiva pues sus valores propios son todos positivos.

También A es simétrica, luego diagonalizable y con todos los valores propios no nulos. Entonces A es invertible.

(0.5 ptos.)

iii) Los vectores propios de A son $\{v_1, v_2, v_3\}$ con

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ y } v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

que puede observarse ya son ortogonales. (Verificar). De modo que, sin necesidad de aplicar Gram-Schmidt, una base ortonormal de vectores propios de A será

$$\{u_1, u_2, u_3\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(1.5 ptos.)

iv) Diagonalización de A.

Se sabe que A es simétrica, diagonalizable e invertible. Entonces $A = PDP^t$ con $P^t = P^{-1}$ en que

$$P = \{u_1, u_2, u_3\} \text{ y } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Así

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \text{ y } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Entonces A se escribe diagonalizada como:

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

(1.0 pto.)

Es claro que $A^{-1} = PD^{-1}P^{-1} = PD^{-1}P^t$ de modo que una matriz diagonal $\tilde{D}$ similar a A^{-1} es

$$\tilde{D} = D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}$$

(0.5 ptos.)