MA-11A Algebra **10 de Diciembre, 2000**

Pauta Examen 1

PROBLEMA 1:

(a).- Matricialmente, la ecuación de la cónica queda

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -10 \\ -10 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6\sqrt{2} & 10\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \; = \; -38\,.$$

Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & -10 \\ -10 & 3 \end{pmatrix}$. Como A es simétrica, es diagonalizable. En particular, su polinomio característico es $(3-\lambda)^2 - 100 = (\lambda - 13)(\lambda + 7)$. Luego, A tiene valores propios 13 y -7, con vectores propios asociados $(1,-1)^t$ y $(1,1)^t$ respectivamente. Sigue que $A = PDP^t$ donde

$$P \; = \; \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad D \; = \; \begin{pmatrix} 13 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}.$$

Hay dos maneras de seguir adelante:

- **Primera Forma:** Haciendo el cambio de variable $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = P^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ se obtiene la ecuación de la cónica

  $$\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} D \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6\sqrt{2} & 10\sqrt{2} \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \; = \; 13u^2 - 7v^2 - 16u + 4v \; = \; -38\,.$$

  Haciendo ahora el cambio de variable $\widetilde{u} = u - \alpha$ y $\widetilde{v} = v - \beta$ se obtiene que

  $$13\widetilde{u}^2 - 7\widetilde{v} + (-16 + 26\alpha)\widetilde{u} + (4 - 14\beta)\widetilde{v} \;\; = \;\; -38 - 13\alpha^2 + 7\beta^2 + 16\alpha - 4\beta\,.$$

  Luego, si $\alpha = 8/13$ y $\beta = 2/7$ y hacemos el cambio de variable $\begin{pmatrix} \widetilde{u} \\ \widetilde{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, obtenemos

  $$13\widetilde{u}^2 - 7\widetilde{v}^2 = -38 + \frac{64}{13} - \frac{4}{7} = -\frac{3062}{91}\,.$$

- **Segunda Forma:** Completando cuadrados, sigue que

  $$\left(\sqrt{13}u - \frac{8}{\sqrt{13}}\right)^2 - \frac{64}{13} - \left(\sqrt{7}u - \frac{2}{\sqrt{7}}\right)^2 + \frac{4}{7} = -38\,.$$

  Luego, obtenemos una cónica centrada en $(\alpha, \beta) = (8/13, 2/7)$ dada por

  $$\left(\sqrt{13}u - \frac{8}{\sqrt{13}}\right)^2 - \left(\sqrt{7}v - \frac{2}{\sqrt{7}}\right)^2 = -38 + \frac{64}{13} - \frac{4}{7} = -\frac{3062}{91}\,.$$

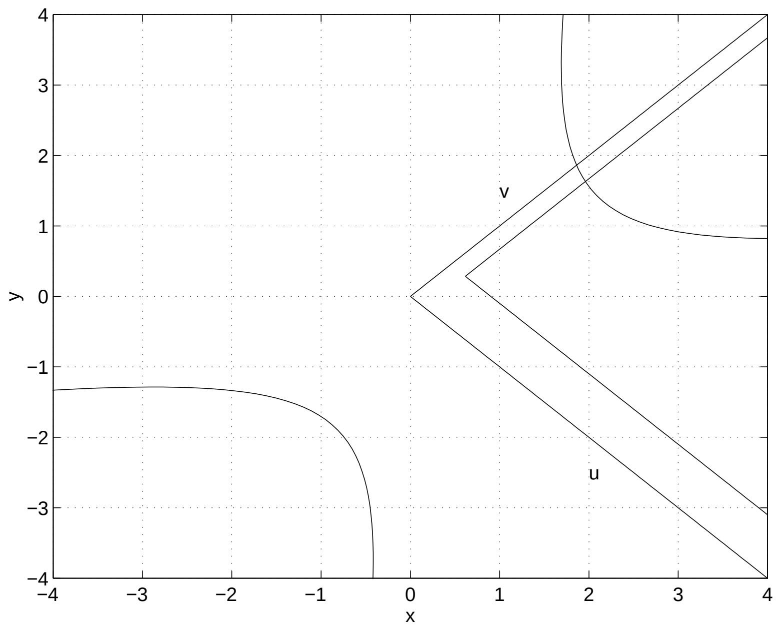

Figura 1: Hipérbola

Sigue que la cónica es una hipérbola. Su grafo se ilustra en la Figura 1. Los ejes $u, v, \widetilde{u}, \widetilde{v}$ podrían haber quedado orientados de manera distinta de la que se muestra en la figura (esto dependerá de la elección de vectores propios y el orden en que se coloquen los valores propios de A en la matriz diagonal D – ver Nota 1 y 2 para mayores detalles)

Nota 1: Los ejes u y v podrían haber quedado orientados al revés de lo que se señala en la figura. Dependiendo esto de que vectores propios se elijan. Por ejemplo, si en vez de elegir el vector propio $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})^t$ se toma $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})^t$ el eje u quedaría apuntando en la dirección contraria.

Nota 2: Los ejes u y v podrían haber quedado intercambiados en caso que en vez de D se hubiese trabajado con la matriz diagonal $\begin{pmatrix} -7 & 0 \\ 0 & 13 \end{pmatrix}$.

Nota 3: Los cambios de variables también podrían haberse hecho en el orden inverso, i.e., primero la translación y luego la rotación. El resultado es similar, pero los cálculos son más engorrosos.

(b.i).- Observar que cualquiera sea $v \in \mathbb{R}^n$ se tiene que

$$Av = \lambda v \Longleftrightarrow (I + A)v = (1 + \lambda)v\,.$$

Luego, v es vector propio de A asociado al valor propio λ si y sólo si v es vector propio de $I + A$ asociado al valor propio $1 + \lambda$.

(b.ii).- Consideremos primero el caso en que A es simétrica con valores propios no-negativos. Como A es simétrica, existen D matriz diagonal y P matriz unitaria tales que $A = PDP^t$. Como los valores propios de A son los elementos de la diagonal de D, tenemos que $d_{i,i} \geq 0$ cualquiera sea i.

Luego, si $x \in \mathbb{R}^n$ y $u = P^t x$,

$$x^t A x = x^t P D P^t x = (P^t x)^t D (P^t x) = u^t D u = \sum_{i=1}^{n} d_{i,i} u_{i,i}^2 \geq 0\,,$$

donde la última desigualdad se tiene porque $d_{i,i} \geq 0$ y $u_{i,i}^2 \geq 0$ cualquiera sea $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Supongamos ahora que A es simétrica semi-definida positiva. Queremos probar que sus valores propios son no-negativos.

- **Primera Forma:** Sea λ valor propio de A. Luego, existe $v \neq 0$ tal que $Av = \lambda v$, y como A es semi-definida positiva,
$$0 \leq v^t A v = \lambda (v^t v) = \lambda ||v||^2\,.$$
Como $||v|| > 0$, se concluye que $\lambda \geq 0$. Como λ es un valor propio cualquiera de A, obtenemos la conclusión deseada.

- **Segunda Forma:** Como A es simétrica, existen D matriz diagonal y P matriz unitaria tales que $A = PDP^t$. Dado que A es semi-definida positiva, sigue que cualquiera sea $x \in \mathbb{R}^n$ se tiene que $0 \leq x^t A x = (P^t x)^t D (P^t x)$. Eligiendo x de forma que $x = Pe_i$ (donde e_i denota el i-ésimo elemento de la base canónica) tenemos que $0 \leq e_i^t D e_i$, i.e., $d_{i,i} \geq 0$ cualquiera sea i. Resumiendo, todos los elementos en la diagonal de D (los valores propios de A) son no-negativos.

(b.iii).- Sea β el valor propio de $I + A$. Por (b.i) sigue que $\beta - 1$ es valor propio de A. Pero (b.ii) implica que $\beta - 1 \geq 0$, i.e., $\beta \geq 1 > 0$.

Como β es valor propio cualquiera de $I+A$, sigue que $I+A$ tiene todos sus valores propios positivos. Por resultado conocido, esto equivale a que $I + A$ es definida positiva.

PROBLEMA 2:

(a).- Observar que $EP = PF$ puesto que

$$EP = \begin{pmatrix} B & ABA \\ B & BA \end{pmatrix} = PF\,.$$

Hay dos formas de concluir que $p_E(\lambda) = p_F(\lambda)$.

- **Primera Forma:** Utilizar el teorema que dice que matrices similares tienen igual polinomio característico.

- **Segunda Forma:** Hacemos la demostración del teorema mencionado en la **Primera Forma**.

  Como P es triangular superior y todos sus elementos en la diagonal son no nulos, entonces P es invertible. Sigue que, $EP = PF$ implica que $E = PFP^{-1}$. Luego, por definición de similitud de matrices se tiene que E y F son similares.

  Lo siguiente es observar que $E - \lambda I = PFP^{-1} - \lambda PP^{-1} = P(F - \lambda I)F^{-1}$. Luego, por propiedades del determinante,
$$p_E(\lambda) = \mathrm{Det}(P(F - \lambda I)P^{-1}) = \mathrm{Det}P \cdot \mathrm{Det}(F - \lambda I) \cdot \mathrm{Det}P^{-1}\,.$$
  Como $\mathrm{Det}P \cdot \mathrm{Det}P^{-1} = 1$ se obtiene que $p_E(\lambda) = \mathrm{Det}P \cdot p_F(\lambda) \cdot \mathrm{Det}P^{-1} = p_F(\lambda)$.

(b.i).- En efecto, por la indicación,

$$p_E(\lambda) = \mathrm{Det}(E - \lambda I) = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} AB - \lambda I & 0 \\ B & -\lambda I \end{pmatrix} = \mathrm{Det}(AB - \lambda I) \cdot \mathrm{Det}(-\lambda I)\,.$$

Como $\mathrm{Det}(-\lambda I) = (-\lambda)^n$ y por definición de polinomio característico, $p_E(\lambda) = (-\lambda)^n p_{AB}(\lambda)$.

(b.ii).- De la parte anterior, $(-\lambda)^n p_{AB}(\lambda) = (-\lambda)^n p_{BA}(\lambda)$. Luego, $p_{BA}(\lambda) = (-\lambda)^{n-m} p_{AB}(\lambda)$. Veremos tres formas de justificar éste último despeje.

- **Primera Forma:** La igualdad es evidentemente cierta si $\lambda \neq 0$. Por continuidad de las expresiones a ambos lados de la igualdad se tiene también para $\lambda = 0$.
- **Segunda Forma:** La igualdad es evidentemente cierta si $\lambda \neq 0$. Como las expresiones a ambos lados de la igualdad son polinomios, entonces estos coinciden en una infinidad de puntos. Luego, por Teorema Fundamental del Algebra, deben ser idénticos.
- **Tercera Forma:** Como $(-\lambda)^n p_{AB}(\lambda) = (-\lambda)^m p_{BA}(\lambda)$, el polinomio $(-\lambda)^n p_{BA}(\lambda)$ es múltiplo del polinomio $(-\lambda)^m$. En particular es divisible por este último. Luego, la expresión $(-\lambda)^n p_{AB}(\lambda)/(-\lambda)^m$ tiene sentido y es igual a $(-\lambda)^{n-m} p_{AB}(\lambda)$.

PROBLEMA 3:

(a).- Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $x, y \in \mathbb{R}^3$ cualesquiera. Se tiene que T es lineal ya que

$$T(\alpha x + \beta y) = (\alpha x + \beta y)u^t = \alpha(xu^t) + \beta(yu^t) = \alpha T(x) + \beta T(y)\,,$$

Nota: También se podía tomar $\beta = 1$ en la anterior demostración y obtener idéntica conclusión.

(b).- Por definición de $\mathbb{K}er(T)$ sabemos que $v \in \mathbb{K}er(T)$ si y sólo si $T(v) = 0$. Luego, $vu^t = 0$. Pero vu^t es igual a la matriz cuyas filas $1, 2, 3$ son vu_1, vu_2, vu_3 respectivamente. Sigue que $vu_i = 0$ cualquiera sea $i \in \{1, 2, 3\}$. Luego, como $u \neq 0$ implica que para algún j se tiene que $u_j \neq 0$, se concluye a partir de $vu_j = 0$ que $v = 0$. Por lo tanto, $\mathbb{K}er(T) = \{0\}$.

La inyectividad de T puede establecerse de las siguientes dos maneras:

- **Primera Forma:** Por propiedades de aplicaciones lineales sabemos que $\mathbb{K}er(T) = \{0\}$ si y sólo si T es inyectiva. Luego, en nuestro caso, concluimos que T es inyectiva.
- **Segunda Forma:** Usando la definición de inyectividad. En efecto, si $v, v' \in \mathbb{R}^3$ son tales que $T(v) = T(v')$, entonces $vu^t = v'u^t$, i.e., $vu_i = v'u_i$ para todo $i \in \{1, 2, 3\}$. Como $u \neq 0$, para algún j se tiene que $u_j \neq 0$. Luego, $vu_j = v'u_j$ implica que $v = v'$. Se concluye que T es inyectiva.

Para determinar una base de $\mathbb{I}m\,(T)$ conviene usar el hecho que una aplicación inyectiva transforma bases en bases. Luego, una base de $\mathbb{I}m\,(T)$ es

$$\{T(e_1), T(e_2), T(e_3)\} = \left\{ \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Estudiamos ahora la sobreyectividad de T.

- **Primera Forma:** Como $3 = \dim \mathbb{I}m\,(T) \neq \dim M_{3,3}(\mathbb{R}) = 9$, se tiene que T no es sobreyectiva.
- **Segunda Forma:** Por Teorema Núcleo Imagen, $3 = \dim \mathbb{R}^3 = \dim \mathbb{K}er(T) + \dim \mathbb{I}m\,(T)$. Luego, como $\dim \mathbb{K}er(T) = 0$, sigue que $\dim \mathbb{I}m\,(T) = 3 < 9 = \dim M_{3,3}(\mathbb{R})$. Por lo tanto, $\mathbb{I}m\,(T) \neq M_{3,3}(\mathbb{R})$, i.e., T no es sobreyectiva.
- **Tercera Forma:** Por definición de sobreyectividad, basta mostrar que existe $M \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ tal que para ningún $v \in \mathbb{R}^3$ se tiene que $T(v) = M$. En particular elegimos $M = I$ y suponemos, para efectos de obtener una contradicción, que existe $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $T(v) = vu^t = I$. Identificando columnas se obtiene que $vu_i = e_i$ para todo $i \in \{1,2,3\}$. Como $u \neq 0$, para algún j se tiene que $u_j \neq 0$. Despejando, obtenemos que $v = e_j/u_j$, lo que implica que $e_i = u_i v = u_i e_j/u_j$. Esto contradice el hecho que $\{e_i, e_j\}$ es linealmente independiente si $i \neq j$.

(c).- Hay que expresar $T(e_i)$ para todo $i \in \{1,2,3\}$ como combinación lineal de la base canónica de $M_{3,3}(\mathbb{R})$. El orden de los elementos de esta última base que utilizaremos estará dado por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Denotemos a estas matrices $E_1, \ldots, E_9$ respectivamente. Observemos entonces que

$$\begin{aligned}
T(e_1) &= \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = u_1E_1 + u_2E_2 + u_3E_3 + 0E_4 + 0E_5 + 0E_6 + 0E_7 + 0E_8 + 0E_9\,, \\
T(e_2) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0E_1 + 0E_2 + 0E_3 + u_1E_4 + u_2E_5 + u_3E_6 + 0E_7 + 0E_8 + 0E_9\,, \\
T(e_3) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix} = 0E_1 + 0E_2 + 0E_3 + 0E_4 + 0E_5 + 0E_6 + u_1E_7 + u_2E_8 + u_3E_9\,.
\end{aligned}$$

Luego, la matriz representante pedida es

$$\begin{pmatrix} u_1 & 0 & 0 \\ u_2 & 0 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 \\ 0 & u_1 & 0 \\ 0 & u_2 & 0 \\ 0 & u_3 & 0 \\ 0 & 0 & u_1 \\ 0 & 0 & u_2 \\ 0 & 0 & u_3 \end{pmatrix}$$

Nota: La elección de un ordenamiento distinto de las matrices $E_1, \ldots, E_3$ de la base canónica de $M_{3,3}(\mathbb{R})$ producirán una matriz representante parecida a la explicitada más arriba pero con las filas permutadas.

(d).- Veamos primero que si $v \in \langle\{u\}\rangle$, entonces $T(v)$ es simétrica. En efecto, por definición de espacio generado, tenemos que $v = \alpha u$ para algún $\alpha \in \mathbb{R}$. Hay dos alternativas para obtener la conclusión deseada.

- **Primera Forma:** Observando que,

$$(T(v))^t = (vu^t)^t = uv^t = u(\alpha u)^t = (\alpha u)u^t = vu^t = T(v)\,,$$

i.e., $T(v)$ es simétrica cualquiera sea $v \in \mathbb{R}^3$.

- **Segunda Forma:** Observando que

$$T(v) = vu^t = \begin{pmatrix} \alpha u_1 \\ \alpha u_2 \\ \alpha u_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha u_1^2 & \alpha u_1 u_2 & \alpha u_1 u_3 \\ \alpha u_2 u_1 & \alpha u_2^2 & \alpha u_2 u_3 \\ \alpha u_3 u_1 & \alpha u_3 u_2 & \alpha u_3^2 \end{pmatrix}.$$

Claramente, $T(v)$ es simétrica.

Supongamos ahora que $T(v)$ es simétrica, i.e., $(T(v))^t = T(v)$. Como $T(v) = vu^t$, sigue que $vu^t = uv^t$. Veremos dos alternativas para concluir la demostración.

- **Primera Forma:** Post-multiplicando ambos lados por u se obtiene que $v(u^t u) = u(v^t u)$, i.e., $v||u||^2 = u(v^t u)$. Como $u \neq 0$, sigue que $||u|| \neq 0$ y por lo tanto $v = [v^t u/||u||^2]u$. Como $v^t u, ||u|| \in \mathbb{R}$, concluimos que $v \in \langle\{u\}\rangle$.

- **Segunda Forma:** De la identidad matricial $vu^t = uv^t$ e identificando términos obtenemos que $v_i u_j = u_i v_j$ cualquiera sean $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Como $u \neq 0$, entonces existe un j tal que $u_j \neq 0$, luego

$$v_1 = \frac{v_j}{u_j} u_1\,, \quad v_2 = \frac{v_j}{u_j} u_2\,, \quad v_3 = \frac{v_j}{u_j} u_3\,.$$

Sigue que $v = (v_j/u_j)u$, i.e., $v \in \langle\{u\}\rangle$.

Finalmente, observemos que las columnas de $T(v) = vu^t$ son vu_1, vu_2, vu_3, i.e., todas ellas se pueden obtener como la multiplicación por un escalar de otra columna. En particular, el espacio que generan tiene dimensión a lo más 1. Sigue que el rango de $T(v)$ es menor o igual a 1. Como una matriz invertible en $M_{3,3}(\mathbb{R})$ debe tener rango igual a 3, concluimos que $T(v)$ no es invertible cualquiera sea $v \in \mathbb{R}^3$.

Nota: Una forma significativamente más engorroso de abordar el problema consiste en mostrar que se obtienen pivotes nulos al escalonar la matriz

$$T(v) = vu^t = \begin{pmatrix} v_1 u_1 & v_1 u_2 & v_1 u_3 \\ v_2 u_1 & v_2 u_2 & v_2 u_3 \\ v_3 u_1 & v_3 u_2 & v_3 u_3 \end{pmatrix}.$$