Pauta Examen
ALGEBRA Diciembre 1996

Pregunta 1

La matriz aumentada del sistema es:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & a & 2a & b \\ 4 & 9 & 5b+2a & 4a & 3+2b \\ 0 & 0 & 6 & a & 5+7b \\ 6 & 10 & 5b+3a & 6a & 3+3b+a \end{array}\right]$$

Usando el algoritmo de escalonamiento se obtiene, al multiplicar la primera fila por -2 y sumarle el resultado a la segunda, y multiplicando la primera fila por -3 y sumársela a la cuarta,

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & a & 2a & b \\ 0 & 7 & 5b & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 2a & 5+7b \\ 0 & 7 & 5b & 0 & 3+a \end{array}\right]$$

Ahora a la cuarta fila le restamos la segunda

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & a & 2a & b \\ 0 & 7 & 5b & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & a & 5+7b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{array}\right]$$

Si $a \neq 0$, entonces la ecuación $x_4 \cdot 0 = a$ no es cierta para ningún $x_4 \in I\!R$, luego el sistema no tiene solución.

Si $a = 0$, el sistema resultante es:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & 7 & 5b & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 5+7b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Las soluciones que se obtienen son infinitas y quedan dadas por: $x_4 \in I\!R, x_3 = \frac{5+7b}{6}, x_2 = \frac{18-25b-35b^2}{42}, x_1 = \frac{67b-35b^2-18}{84}$

Pregunta 2

(a) Calculemos los valores propios de A. Para ello debo calcular el polinomio característico.

$$\begin{aligned}p(\lambda) &= (1-\lambda)(1-\lambda)^2(2-\lambda) - (2-\lambda)(1-\lambda)\\ &= (1-\lambda)(2-\lambda)((1-\lambda)^2-1)\\ &= (1-\lambda)(2-\lambda)(\lambda-2)\lambda.\end{aligned}$$

Luego los valores propios son: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$.

Los vectores propios asociados a $\lambda_1 = 0$; se resuelve el sistema:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &= 0\\ x_1 + x_2 &= 0\\ 2x_3 &= 0\\ x_4 &= 0\end{aligned}$$

De lo que se deduce, $x_3 = x_4 = 0, x_1 = -x_2$, luego un vector propio normalizado es $v_1^T = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0, 0)$.

Los vectores propios asociados a $\lambda_2 = 1$; se resuelve el sistema:

$$\begin{aligned}x_2 &= 0\\ x_1 &= 0\\ x_3 &= 0\\ x_4 &\in I\!R\end{aligned}$$

De lo que se deduce el vector normalizado $v_2^T = (0, 0, 0, 1)$.

Finalmente, los vectores propios asociados a $\lambda_3 = 2$; se resuelve el sistema:

$$\begin{aligned}-x_1 + x_2 &= 0\\ x_1 - x_2 &= 0\\ x_3 &\in I\!R\\ -x_4 &= 0\end{aligned}$$

De lo que se deduce $x_1 = x_2, x_4 = 0, x_3 \in I\!R$, luego obtenemos dos vectores generadores ortogonales, que normalizados son:

$$v_3^T = (0, 0, 1, 0), v_4^T = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0).$$

Luego si

$$P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 1/\sqrt{2}\\ -1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 1/\sqrt{2}\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

entonces $A = PDP^{-1}$, Pues $P^{-1} = P^T$.

(b) La matriz asociada a la forma cuadrática $q(x, y) = 3x^2 + 3y^2 - 2xy$ es:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Para ver si es definida positiva calculemos sus subdeterminantes:

$$\begin{aligned} detA^{(1)} &= 3 > 0 \\ detA^{(2)} &= 9 - 1 = 8 > 0. \end{aligned}$$

Luego A es definida positiva.

Para dibujar la cónica $q(x, y) = 4$ calculemos los valores y vectores propios de A. Partamos calculando,

$$\begin{aligned} p(\lambda) = (3 - \lambda)^2 - 1 = 9 + \lambda^2 - 6\lambda - 1 &= \lambda^2 - 6\lambda + 8 \\ &= (\lambda - 4)(\lambda - 2). \end{aligned}$$

Luego $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 4$ son los valores propios de A.

Ahora calculemos los vectores propios asociados:
$\lambda_1 = 2$: $x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow v_1^T = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, es un vector propio normalizado.
$\lambda_2 = 4$: $-x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow v_2^T = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$, es un vector propio normalizado.
Notar que v_1 y v_2 son ortogonales y si tomamos

$$P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \text{ entonces } A = PDP^T.$$

El cambio de variable es entonces $\binom{y_1}{y_2} = P^T \binom{x_1}{x_2}$.

Pregunta 3

(i) Si $x^T = (x_1, x_2, ..., x_k)$ entonces $P \cdot x = x_1 v_1 + ... + x_k v_k = 0$. Como $\{v_1, ..., v_k\}$ es un conjunto ℓ.i. entonces $x_1 = x_2 = ... = x_k = 0$ es la única solución posible.

(ii) Sea $x \in \mathbb{R}^k$ y $y = P \cdot x$. Luego $x^T P^T P x = y^T \cdot y = \|y\|^2 \geq 0$. Además $\|y\|^2 = 0$ ssi $y = 0$; es decir si $x \neq 0$ entonces por la parte (i) $Px \neq 0$ y luego $\|Px\|^2 > 0$. Esto prueba que $P^T P$ es definida positiva.

Calculemos el $Ker(P^T P)$. Para ello se debe calcular $x \in \mathbb{R}^k$ tal que $P^T \cdot P \cdot x = 0$. Pre-multiplicando por x^T se tiene que: $x^T \cdot P^T \cdot P \cdot x = 0$, de la que se deduce que $Px = 0$, y luego $x = 0$. Luego $Ker(P^T P) = \{0\}$.

(iii)

$$
\begin{aligned}
A \cdot P &= P(P^T P)^{-1} P^T \cdot P \cdot P = P \cdot (P^T P)^{-1}(P^T \cdot P) = P \cdot I = P \\
A^2 &= P(P^T P)^{-1} \cdot P^T \cdot P(P^T P)^{-1} \cdot P^T \\
&= P \cdot (P^T P)^{-1} \cdot P^T = A.
\end{aligned}
$$

Luego $A \cdot v_i = v_i, i \in \{1, ..., k\}$, probando que v_i es un vector propio asociado a 1.

(iv) Se tiene que $P^T w_i = \begin{pmatrix} \langle v_1, w_i \rangle \\ \vdots \\ \langle v_k, w_i \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, luego,

$$
A = P(P^T P)^{-1} P^T w_i = 0.
$$

(v) La matriz representante se calcula como sigue:

$$
\begin{aligned}
A \cdot v_i &= v_i, \quad i \in \{1, ..., k\}, \\
A \cdot w_i &= 0, \quad i \in \{1, ..., n-k\}.
\end{aligned}
$$

Luego,

$$
M = \begin{bmatrix}
1 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & & \vdots & & \vdots \\
\vdots & & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{bmatrix}
$$